

普通高等教育大学物理规划教材

# 大学基础物理学习指导

郑勇林 朱晓玲 卢孟春 戴松晖 编著

電子工業出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京 · BEIJING

## 内 容 简 介

本书是与《大学基础物理学》(上、下)配套的辅导教材。本书依据教育部非物理专业基础课程教学指导委员会颁布的《理工科非物理类专业大学物理课程教学基本要求》，从科学技术的发展和工程技术人才培养的总体要求出发，兼顾实用性和先进性，内容覆盖了所有需要掌握的基本理论和方法。书中对每章的教学重点和主要内容做了明确提示，精选例题分析有助于提高读者的解题能力，丰富的习题及参考答案有助于读者强化对所学知识的理解和运用。

本书可作为高等学校非物理类专业大学物理课程的辅助教材，也可供相关领域的工程技术人员、研究生学习参考。

未经许可，不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。  
版权所有，侵权必究。

## 图书在版编目(CIP)数据

大学基础物理学习指导 / 郑勇林等编著. — 北京: 电子工业出版社, 2014.3  
(普通高等教育大学物理规划教材)

ISBN 978-7-121-22012-8

I. ①大… II. ①郑… III. ①物理学—高等学校—教学参考资料 IV. ①O4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 282178 号

策划编辑: 张小乐

责任编辑: 张小乐

印 刷:

装 订:

出版发行: 电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编 100036

开 本: 787×980 1/16 印张: 15 字数: 340 千字

印 次: 2014 年 3 第 1 次印刷

定 价: 32.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题, 请向购买书店调换。若书店售缺, 请与本社发行部联系, 联系及邮购电话: (010)88254888。

质量投诉请发邮件至 [zltts@phei.com.cn](mailto:zltts@phei.com.cn), 盗版侵权举报请发邮件至 [dbqq@phei.com.cn](mailto:dbqq@phei.com.cn)。

服务热线: (010)88258888。

# 前 言

为了更好地适应我国高等教育发展,满足目前社会对一般高等学校大众化教育背景下人才培养的各项要求,进一步探索和完善我国高等学校应用型人才培养体系,积极探索适应 21 世纪人才培养的教学模式,我们根据教育部非物理类专业物理基础课程教学指导分委员会制定的《理工科非物理类专业大学物理课程教学基本要求》(后简称“纲要”)的思想和精神,编写了《大学基础物理学》(上、下)(郑勇林、杨维、卢孟春、赵茂娟等编著)教材及《大学基础物理学习指导》辅导教材。

大学基础物理是工科大学生学习其他后续课程的基础课,是一门全面、系统地培养学生综合素质的课程。大学基础物理课程的学习,可以培养学生科学的思维方式和研究问题的方法,能开阔学生思路,激发学生的探索和创新精神,提高学生科学素养,增强社会适应能力。同时,相应的学习指导和习题又是帮助学生理解和掌握物理学基本概念、基本规律、基本方法的必要手段,也是培养学生掌握科学的学习方法,培养独立获取知识和解决问题的能力的重要途径。为了帮助学生更好地学好大学物理基础知识和解题方法,我们根据多年的教学经验编写了本书。

本书共 12 章,与《大学基础物理学》(上、下)教材配套使用,但本书在章节的编排上相对教材具有一定独立性,以体现学习指导书的特征,同时也能对不使用配套教材的读者学习大学基础物理学提供学习指导。

本书符合一般院校大学物理课程的教学要求并方便课堂教学,覆盖了需要掌握的基本理论和方法,精选了大学物理课程教学内容的知识点,每章按学习要求、内容提要、精选例题分析、重点难点分析、习题等几部分编写。学习要求部分,遵照“纲要”精神为了解、理解、掌握和熟练掌握四个层次对学生提出不同要求,为教学不同的对象提供了理论依据。内容提要概述了本章需要掌握的基本概念、基本公式、定律和方法,重要的知识点等内容,从易于学生理解的角度给出一定的分析阐述。精选例题部分主要从本章难于理解的知识点入手,对相关知识的应用给出一定的解题方法及关键步骤,旨在帮助学生学会运用基本理论分析解决实际问题。重点难点分析部分,一是指导教学双方理清思路,抓住主线,正确把握相关知识内容的教与学;二是对本章难点之处进行分析讨论,提出具体的解决方法。习题部分是对本章内容学习之后的自我检测。题目中含有基本概念、知识点的一般应用、综合应用等题目。在本书最后附有习题的参考解或答案。

本书第 1~3 章由赵茂娟、王晓茜、戴松晖编写,第 4~8 章由杨维、朱晓玲、刘鸿、陆智编写,第 9~12 章由郑勇林、卢孟春、孙婷雅、朱晓玲编写,李伯恒、陆智参加了例题、习题的编写及本书的讨论。全书由郑勇林统稿。

本书在编写过程中得到了成都大学教务处、长江师范学院教务处的大力支持，编者在此致以衷心的感谢。

西南大学郑瑞伦教授仔细审阅了书稿并提出许多修改意见，在此表示感谢。

成都大学汪令江教授，长江师范学院周晏副教授为本书编写做了大量工作，在此表示感谢。

本书编写中参考了其他出版社的同类资料，在此一并致谢。

由于编者水平有限，书中可能存在不妥甚至错误之处，敬请批评指正。

编 者

2014 年 1 月于成都

# 目 录

第 1 章	力学 运动学 .....	1
1.1	学习要求 .....	1
1.2	内容提要 .....	2
1.3	重点难点分析 .....	14
1.4	精选例题分析 .....	15
1.5	习题 .....	21
第 2 章	振动 .....	24
2.1	学习要求 .....	24
2.2	内容提要 .....	24
2.3	重点难点分析 .....	32
2.4	精选例题分析 .....	33
2.5	习题 .....	36
第 3 章	波动 .....	41
3.1	学习要求 .....	41
3.2	内容提要 .....	41
3.3	重点难点分析 .....	47
3.4	精选例题分析 .....	48
3.5	习题 .....	52
第 4 章	静电场 .....	55
4.1	学习要求 .....	55
4.2	内容提要 .....	55
4.3	重点难点分析 .....	63
4.4	精选例题分析 .....	63
4.5	习题 .....	72
第 5 章	静电场中的导体与电介质 .....	77
5.1	学习要求 .....	77
5.2	内容提要 .....	77

5.3	重点难点分析 .....	84
5.4	精选例题分析 .....	85
5.5	习题 .....	89
第 6 章	稳恒磁场 恒定磁场中的磁介质 .....	92
6.1	学习要求 .....	92
6.2	内容提要 .....	92
6.3	重点难点分析 .....	98
6.4	精选例题分析 .....	99
6.5	习题 .....	105
第 7 章	电磁感应 电磁场理论 .....	108
7.1	学习要求 .....	108
7.2	内容提要 .....	109
7.3	重点难点分析 .....	116
7.4	精选例题分析 .....	116
7.5	习题 .....	121
第 8 章	气体动理论 热力学基础 .....	126
8.1	学习要求 .....	126
8.2	内容提要 .....	127
8.3	重点难点分析 .....	138
8.4	精选例题分析 .....	138
8.5	习题 .....	143
第 9 章	波动光学 .....	147
9.1	学习要求 .....	147
9.2	内容提要 .....	148
9.3	重点难点分析 .....	159
9.4	精选例题分析 .....	160
9.5	习题 .....	165
第 10 章	狭义相对论基础 .....	168
10.1	学习要求 .....	168
10.2	内容提要 .....	168
10.3	重点难点分析 .....	173
10.4	例题精选分析 .....	174
10.5	习题 .....	178

第 11 章	量子力学基础	180
11.1	学习要求	180
11.2	内容提要	181
11.3	重点难点分析	188
11.4	精选例题分析	189
11.5	习题	191
第 12 章	分子与固体 现代高新技术	193
12.1	学习要求	193
12.2	内容提要	194
12.3	重点难点分析	203
12.4	精选例题分析	203
12.5	习题	204
部分习题	参考答案	205

# 第1章 力学 运动学

本章知识是在质点模型基础上，定义描述质点运动的4个物理量（位置矢量、位移、速度和加速度）及运动方程，同时指出它们的相互关系，进而讨论质点的直线运动、曲线运动、刚体的定轴转动；讨论质点的运动状态和运动状态的变化，以及引起物体运动状态变化的规律——牛顿定律，阐述力对物体的瞬时作用规律；进一步研究力的空间累积作用和力对时间的累积作用，提出质点与质点系的动量定理、动量守恒定律和能量守恒定律，进而建立起整个经典力学体系。

物理学是研究物质的基本结构、基本运动形式及物质相互作用和转化规律的学科。自然界的一切物质都处于永恒的运动之中，物质的运动形式是多种多样的。物理学研究目的在于认识物质运动的普遍规律，揭示物质各层次的内部结构。在物质的各种运动中，机械运动是最普遍、最基本的物质运动形式，力学就是研究物体机械运动和相互作用的科学。

## 1.1 学习要求

### 1. 质点运动的描述

- (1) 掌握位置矢量、位移、速度、加速度等描述质点运动的物理量；理解平面曲线运动的角位移、角速度、角加速度、切向加速度、法向加速度等概念。
- (2) 理解圆周运动的角速度、角加速度、切向加速度、法向加速度。
- (3) 理解伽利略相对性原理，会利用伽利略坐标、速度变换式分析相对运动问题。

### 2. 牛顿运动定律

- (1) 掌握牛顿三定律及其适用条件，熟练运用隔离法和整体法分析物体受力。
- (2) 熟练掌握运用微积分方法求解一维变力作用下的简单质点的动力学问题。
- (3) 正确理解质量、力等基本概念，会分析三种基本力——万有引力、弹性力和摩擦力。

### 3. 运动的守恒定律

- (1) 掌握力做功的概念，会计算变力的功；掌握保守力做功的特点及势能的概念；会计算重力、弹性力、万有引力的势能。
- (2) 掌握质点的动能定理和动量定理，理解质点系的内力和外力，了解质心概念和质心运动定理。



(3) 掌握质点系的动量守恒定律、机械能守恒定律，并能熟练应用功能关系解决一些简单实际的问题。

(4) 了解完全弹性碰撞和完全非弹性碰撞的特点。

#### 4. 刚体定轴转动

(1) 掌握描述刚体转动的物理量及角量与线量的关系；理解转动惯量的概念，理解刚体定轴转动的转动动能的概念，了解刚体定轴转动的一般特点。

(2) 掌握角动量概念，掌握刚体绕定轴转动的角动量守恒定律及其适用条件。

(3) 理解刚体的定轴转动的转动定律，能在有刚体绕定轴转动的问题中正确应用机械能守恒定律。

(4) 能应用刚体的定轴转动的角动量定律和角动量守恒定律解决简单的刚体运动的力学问题。

## 1.2 内容提要

### 1. 基本概念

#### (1) 质点与刚体

把物体视为一个具有一定质量而大小可忽略的几何点，这样的几何点称为质点。质点是物体的一种理想模型。例如，导航地图中显示的移动的汽车、雷达屏幕上显示的飞行的飞机等就被处理成一个质点。

在外力的作用下，物体的大小和形状都不变的物体称为刚体。刚体是物体的又一种理想模型。例如，某一特殊的质点系，无论它在多大的外力作用下，系统内任意两质点间的距离始终保持不变。

#### (2) 参考系与坐标系

为了描述物体的运动而被选定的参考物体称为参考系。为了定量描述物体相对参考系的位置与运动情况，在①选定的参考系上建立的，②带有标尺的数学坐标，称为坐标系。在科学研究中通常选用的坐标系有直角坐标系、自然坐标系、柱坐标系和球坐标系等。

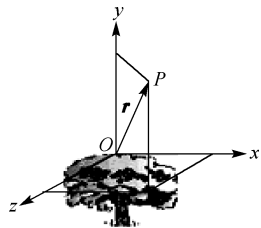


图 1.1 位置矢量

#### (3) 描述质点运动的物理量

① 位置矢量。在坐标系中质点的位置用一个被称为位置矢量（简称位矢）的矢量来描述。在参考系中任意取定一点  $O$  作为参考点，如图 1.1 所示，从  $O$  点指向质点在某一时刻所处的位置  $P$ ，作一矢量  $\mathbf{r}$ ，称为质点在该时刻的位矢，即

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$$

在直角坐标系中，位矢  $\mathbf{r}$  可表示为

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad (1-1)$$

其中,  $P$  点的位置坐标  $x$ 、 $y$ 、 $z$  就是该点位矢  $\mathbf{r}$  在直角坐标系  $Oxyz$  中沿各轴的分量。直角坐标系  $Oxyz$  中各轴  $Ox$ 、 $Oy$ 、 $Oz$  的正方向分别用相应的单位矢量  $\mathbf{i}$ 、 $\mathbf{j}$ 、 $\mathbf{k}$  表示, 而  $\mathbf{r}_x = x\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{r}_y = y\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{r}_z = z\mathbf{k}$  是位矢  $\mathbf{r}$  的三个分矢量。

质点的位置矢量  $\mathbf{r}$  随时间  $t$  的变化关系式

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \quad (1-2)$$

叫做质点的运动方程。

② 位移。位移是指自运动始点指向终点的有向直线线段。它描述质点在某段时间内位置的变化, 为

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \quad (1-3)$$

位移是位置矢量的增量。

③ 速度。速度是描述质点运动快慢和运动方向的物理量, 速度的大小称为速率。

平均速度: 
$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} \quad (1-4)$$

瞬时速度: 
$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (1-5)$$

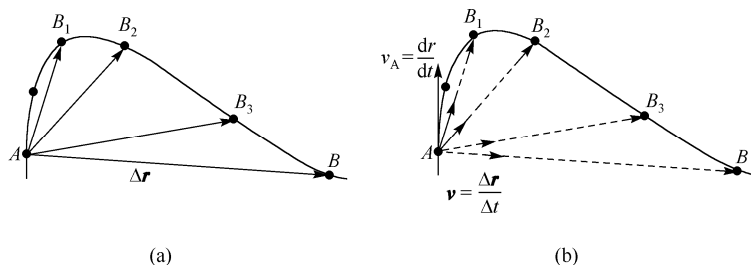
平均速度是位移  $\Delta\mathbf{r}$  与时间  $\Delta t$  的比值, 反映了一段时间内位置变化的平均快慢, 方向与  $\Delta\mathbf{r}$  相同。在描述质点运动时, 也常采用“速率”这个物理量, 把路程  $\Delta s$  与时间  $\Delta t$  的比值  $\Delta s / \Delta t$  称为质点在时间  $\Delta t$  内的平均速率。平均速度与平均速率都与  $t$  和  $\Delta t$  有关系。瞬时速度是位置矢量对时间的一阶导数, 是  $\Delta t \rightarrow 0$  时平均速度的极限值, 反映了  $t$  时刻位置变化的快慢和方向, 瞬时速度只与  $t$  有关系。位移  $\Delta\mathbf{r}$ 、平均速度  $\bar{\mathbf{v}}$  与瞬时速度  $\mathbf{v}$  的关系如图 1.2 所示。位移沿割线  $AB$  的方向, 当  $\Delta t$  趋于零时,  $B$  点逐渐趋近于  $A$  点, 相应的割线  $AB$  逐渐趋近于  $A$  点的切线, 所以质点的速度方向是沿着轨迹上质点所在点的切线方向并指向前进的一侧, 亦即质点位矢时间的瞬时变化率。

速度在直角坐标轴上的表示为

$$\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} \quad (1-6)$$

沿坐标轴的分量分别是

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} \\ v_y &= \frac{dy}{dt} \\ v_z &= \frac{dz}{dt} \end{aligned} \quad (1-7)$$

图 1.2 平均速度  $\bar{\mathbf{v}}$  与瞬时速度  $\mathbf{v}$ 

也就是说，质点运动的速度矢量在直角坐标轴上的分量等于相应的位置坐标对时间的一阶导数（标量导数）。所以速度的大小可以用下式计算：

$$v = |\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \quad (1-8)$$

速度的方向可用下式计算：

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{v_x}{v} \\ \cos \beta &= \frac{v_y}{v} \\ \cos \gamma &= \frac{v_z}{v} \end{aligned} \quad (1-9)$$

式中， $\alpha$ ， $\beta$ ， $\gamma$  分别为速度矢量  $\mathbf{v}$  与  $x$ ， $y$ ， $z$  轴之间的夹角。

在自然坐标系中，速度矢量可表示为

$$\bar{\mathbf{v}} = v \mathbf{e}_\tau = \frac{ds}{dt} \mathbf{e}_\tau \quad (1-10)$$

④ 加速度。加速度是反映质点速度矢量随时间变化的物理量。

平均加速度：

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} \quad (1-11)$$

瞬时加速度：

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \quad (1-12)$$

平均加速度是速度矢量增量与时间的比值，反映了一段时间内速度变化的平均快慢和总体方向；瞬时加速度是速度矢量对时间的一阶导数，反映了某瞬时速度变化的快慢和方向。

在直角坐标系中，可将加速度用分量式表示为

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k} = \frac{dv_x}{dt} \mathbf{i} + \frac{dv_y}{dt} \mathbf{j} + \frac{dv_z}{dt} \mathbf{k} = \frac{d^2 x}{dt^2} \mathbf{i} + \frac{d^2 y}{dt^2} \mathbf{j} + \frac{d^2 z}{dt^2} \mathbf{k} \quad (1-13)$$

在自然坐标系中，加速度矢量可表示为

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_\tau + \mathbf{a}_n = \frac{dv}{dt} \mathbf{e}_\tau + \frac{v^2}{\rho} \mathbf{e}_n \quad (1-14)$$

式中， $\rho$  是质点的运动轨迹上某点的曲率半径， $\mathbf{e}_\tau$  为质点沿切向方向的单位矢量， $\mathbf{e}_n$  是垂直于  $\mathbf{e}_\tau$  并指向曲率圆心的单位矢量， $\frac{dv}{dt}$  为切向加速度，反映速度大小的变化， $\frac{v^2}{\rho}$  为法向加速度，反映速度方向的变化。

## 2. 描述质点运动的角量

角位置（角坐标）。某时刻质点和坐标原点的连线与参考轴的夹角  $\theta$  称为角位置，质点运动时，角位置随时间的变化表示为  $\theta = \theta(t)$ 。

角位移是指角位置在  $\Delta t$  时间内的变化量， $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ 。

角速度是指角位移对时间的变化率，表示为

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta(t)}{dt} \quad (1-15)$$

角加速度是指角速度对时间的变化率，表示为

$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} \quad (1-16)$$

线量与角量的关系（质点做半径为  $R$  的圆周运动时）为

$$\begin{aligned} \Delta s &= R\Delta\theta \\ v &= R\omega \\ a_\tau &= R\alpha \\ a_n &= \frac{v^2}{R} = R\omega^2 \end{aligned} \quad (1-17)$$

## 3. 相对运动

不同参考系对同一个物体运动的描述是不同的，如图1.3所示。 $O'x'y'$  坐标系相对于  $Oxy$  坐标系沿  $Ox$  轴以速度  $u$  运动，那么，一个运动质点在两个做相对运动的参考系中的位移及速度关系为

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{r} &= \Delta \mathbf{r}' + \Delta \mathbf{r}_0 \\ \mathbf{v} &= \mathbf{v}' + \mathbf{u} \end{aligned} \quad (1-18)$$

式中， $\Delta \mathbf{r}$  为运动质点相对于  $S$  系的位矢变化， $\Delta \mathbf{r}'$  为运动质点相对于  $S'$  系的位矢变化， $\Delta \mathbf{r}_0$

为  $S'$  系原点对  $S$  系原点的位矢变化,  $\mathbf{v}$  为质点相对于  $S$  系的速度,  $\mathbf{v}'$  为质点相对于  $S'$  系的速度,  $\mathbf{u}$  为  $S'$  系相对  $S$  系的速度, 也称为牵连速度。

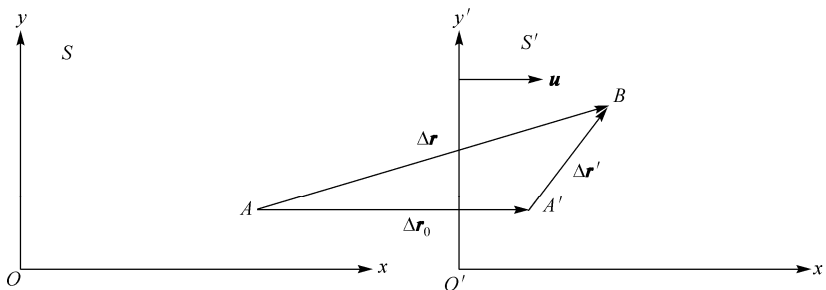


图 1.3 相对运动的描述

#### 4. 惯性与惯性系

物体保持静止或匀速直线运动状态的特性, 称为惯性。

在研究物体相对运动时, 牛顿第一定律定义了一种参考系, 在这种参考系中观察, 一个不受力作用的物体将保持其静止或匀速直线运动的状态不变。这样的参考系称为惯性参考系, 也叫惯性系。也就是说, 牛顿第一定律成立的参考系是惯性系。相反, 第一定律不成立的参考系称为非惯性系。

#### 5. 力与力矩

##### (1) 力

力是物体与物体之间的相互作用, 力是矢量, 有大小和方向。它是量度物体间相互作用的物理量。它能使质点运动的状态发生变化或使物体发生形变。牛顿三条定律都涉及力, 牛顿第一、第二定律以受力物体为对象来研究力的作用效果, 牛顿第三定律则指出物体间的相互作用是相互的。

日常生活中常见的力有: 重力  $W = mg$ , 弹力  $f = -kx$ , 摩擦力包括静摩擦力  $f \leq \mu_s N$  ( $\mu_s$  为静摩擦系数) 和滑动摩擦力  $f = \mu_k N$  ( $\mu$  摩擦系数)。

近代物理证明, 自然界物体之间的相互作用力可归结为 4 类: ①万有引力  $F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$  (重力属这类力); ②电磁力 (弹力、摩擦力、黏性力等相邻原子或分子之间的作用力); ③强力, 属物质内更深层次的一种作用力; ④弱力, 属亚原子之间的一种力。

\*另一类是惯性力, 即在加速参考系中引入牛顿运动定律的力, 如在平动加速参考系中,  $\mathbf{F} = -m\mathbf{a}$ , 惯性离心力  $\mathbf{F}_i = -m\omega^2 r\mathbf{n}$ 。

##### (2) 力矩

在转动的研究中, 力矩是一个重要的概念。通常有力  $\mathbf{F}$  对给定点的力矩和力  $\mathbf{F}$  对定轴转动的力矩两个概念。

力  $\mathbf{F}$  对给定点  $O$  的力矩  $M_o$  为位矢  $\mathbf{r}$  与力  $\mathbf{F}$  的矢量积表示

$$\mathbf{M}_o = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (1-19)$$

这是个矢量, 对于可以绕  $O$  点任意转动的刚体, 这个力矩矢量将决定它转动状态的变化;

力  $\mathbf{F}$  对给定轴  $Oz$  的力矩  $M_z$ , 因为力  $\mathbf{F}$  可以分解为平行于转轴的分力  $F_{//}$  和垂直于转轴的分力  $F_{\perp}$ , 而  $F_{//}$  对刚体转动没有贡献, 只有  $F_{\perp}$  能使刚体转动。力  $F_{\perp}$  的力矩可表示为

$$M_z = F_{\perp} r \sin \varphi = F_{\perp} d \quad (1-20)$$

$M_z$  叫做力  $\mathbf{F}$  对转轴  $Oz$  的力矩。式中,  $\varphi$  为  $F_{\perp}$  与转轴到力作用点半径  $r$  的夹角。

说明: 如果有几个力同时作用, 那么上述力  $\mathbf{F}$  可认为是几个力的合力。

### (3) 转动惯量

转动惯量是表征刚体转动惯性大小的物理量, 定义为

$$J = \sum \Delta m_i r_i^2 \quad (1-21a)$$

式中,  $\Delta m_i$  为刚体中任一质量元,  $r_i$  为该质量元到转轴的距离。当刚体质量为连续分布时,  $J$  表示为

$$J = \int_V r^2 dm \quad (1-21b)$$

计算转动惯量的平行轴定理

$$J = J_c + mh^2 \quad (1-21c)$$

式中,  $J_c$  是刚体对通过刚体质心的轴线的转动惯量,  $J$  是刚体对任一转轴的转动惯量, 它等于刚体对通过质心并与该轴平行的轴的转动惯量  $J_c$  加上刚体质量与两轴间距离  $h$  的二次方的乘积,  $m$  是刚体的质量。由式 (1-21c) 可见,  $J$  的大小不仅与刚体质量有关, 还与质量的分布和转轴的位置有关。

### (4) 转动定律

刚体在总外力矩  $M_z$  的作用下所获得的角加速度  $\alpha$  与总外力矩的大小成正比, 并与转动惯量  $J$  成反比, 这种关系称为定轴转动定律, 其数学表达式为

$$M_z = J\alpha = J \frac{d\omega}{dt} \quad (1-22)$$

式 (1-22) 表明了力矩的瞬时作用规律。与牛顿第二定律  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$  相比, 力矩  $M_z$  与力  $\mathbf{F}$  对应, 转动惯量  $J$  与质量  $m$  对应, 角加速度  $\alpha$  与加速度  $\mathbf{a}$  对应。

## 6. 动量与角动量

### (1) 动量

与速度类似, 动量也是描述物体运动状态的物理量, 即  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ 。它是矢量, 其方向与

速度方向一致。在物理学中,用  $(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  来表示质点的运动状态比用  $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$  来表示更能体现其物理意义。因此,也可以说动量是物体做机械运动的度量。动量的单位是  $\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ 。

## (2) 角动量

质点的角动量是对某一定点而言的,其定义为

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v} \quad (1-23)$$

式(1-23)表明角动量  $\mathbf{L}$  的大小为  $L = rp \sin \varphi$ , 方向垂直于位矢  $\mathbf{L}$  和动量  $\mathbf{p}$  所组成的平面,指向是由  $\mathbf{r}$  经小于  $180^\circ$  的角转到  $\mathbf{p}$  的右手螺旋前进的方向。

注意:式(1-23)中的  $\mathbf{r}$  是该质点相对给定点  $O$  的位矢,参考点不同,角动量也不同,因此提到角动量一定要说明是对哪一个参考点而言的。

**思考题:** 质点做圆周运动,以圆心为参考点的角动量是怎样的?

刚体做定轴转动的角动量定义为

$$\mathbf{L} = J\boldsymbol{\omega} \quad (1-24)$$

$J$  与  $\boldsymbol{\omega}$  分别是刚体绕同一固定轴的转动惯量与角速度。 $\mathbf{L}$  与  $\boldsymbol{\omega}$  都是矢量,但在定轴转动情况下,仅有正负之分,用代数量处理即可。

## 7. 冲量与冲量矩

冲量是描述力对时间累积作用的物理量。冲量定义为  $\mathbf{I} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(t) dt$ , 它是矢量,其方向与力的方向一致(说明:  $\mathbf{I}$  的方向和大小要由这段时间内所有微分冲量  $\mathbf{F}(t)dt$  的矢量和来决定,而不是由某一瞬时的  $\mathbf{F}$  决定,但在恒力作用时  $\mathbf{I}$  与  $\mathbf{F}$  同向)。上述积分中  $\mathbf{F}(t)$  的关系一般比较复杂,无法确切知道其具体形式。当力作用时间很短时,为了计算方便,常用平均冲力  $\bar{\mathbf{F}}$  代替  $\mathbf{F}(t)$  来计算冲量,其关系为

$$\mathbf{I} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(t) dt = \bar{\mathbf{F}}(t_2 - t_1) \quad (1-25a)$$

恒力作用时,冲量为

$$\mathbf{I} = \mathbf{F}\Delta t = \mathbf{F}(t_2 - t_1) \quad (1-25b)$$

冲量的单位是  $\text{N} \cdot \text{s}$ 。

冲量矩(力矩的冲量)是力矩的时间积累效应,定义为  $\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_z(t) dt$ , 冲量矩是矢量。也可理解为  $\Delta t$  时间内对轴的力矩的冲量和或冲量矩之和。

## 8. 动量定理和动量守恒定律

### (1) 动量定理

物体在运动过程中所受合外力的冲量,等于质点(或质点系)动量的增量。其数学形式为

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(t) dt = m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1 \quad \text{或} \quad \mathbf{I} = \mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1 \quad (1-26a)$$

它是牛顿第二定律的另一种表达形式, 阐述力对时间累计效应的物理规律。其微分形式为

$$\mathbf{F} dt = d\mathbf{p} = d m \mathbf{v} \quad (1-26b)$$

理解动量定理时注意以下几点:

① 尽管外力在运动过程中时刻改变, 物体的速度方向也可逐点不同, 但却总是遵守动量定理。即不管物体运动过程中动量变化的细节如何, 冲量的大小和方向总等于物体始末动量的矢量差。

② 动量定理不仅适用于碰撞或打击过程, 也适用于其他力学过程。式(1-26a)、式(1-26b)中的力  $\mathbf{F}$  是物体所受的合外力。在处理铅直方向的碰撞这类问题时还应考虑重力, 当物体相互作用力远大于重力时, 重力可被忽略。

③ 动量定理是由牛顿第二定律推导出的, 而牛顿第二定律只适用于惯性系, 所以动量定理也只适用于惯性系。具体应用时, 需要选择合适的坐标系, 用其在坐标轴上的分量式进行计算。

## (2) 动量守恒定律

若系统所受合外力为零, 即  $\sum_i \mathbf{F}_i = 0$ , 则系统的总动量不随时间改变, 即

$$\sum m_i \mathbf{v}_i = m \mathbf{v}_c = \text{常矢量} \quad (1-27)$$

这一结论称为动量守恒定律。不难看出, 系统的动量不变与质心保持匀速直线运动状态是等效的。

动量守恒定律表明, 在物体机械运动转移过程中, 系统中某一物体获得动量的同时, 必然有别的物体失去了一份与之相等的动量。所以, 动量守恒定律的深刻含义在于它是物体机械运动的一种量度。物体动量的转移反映了物体机械运动的转移。

## 9. 角动量定理和角动量守恒定律

### (1) 角动量定理

式(1-23)和式(1-24)分别定义了质点对定点的角动量和刚体做定轴转动的角动量, 质点角动量定理和刚体角动量定理可以共同表示为

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}(t) dt = \mathbf{L}_2 - \mathbf{L}_1 \quad (1-28)$$

式中,  $\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}(t) dt$  是作用在物体上的冲量矩。式(1-28)的物理意义是, 作用于物体的冲量矩等于角动量的增量。对于质点而言, 力矩  $\mathbf{M}$  和角动量  $\mathbf{L}$  必须是对同一个参考点的; 对于刚体而言, 力矩和角动量必须是对同一转轴的。



定轴转动刚体的角动量定理的微分形式为

$$\mathbf{M}_z = \frac{d(J\omega)}{dt} = \frac{d\mathbf{I}_z}{dt} \quad (1-29)$$

该式表明刚体所受到的对某给定轴的总外力矩等于刚体对该轴的角动量的时间变化率。该式与式(1-22)的意义完全一样,但适用范围更广泛,既适用于刚体,也适用于非刚体。

## (2) 角动量守恒定律

若作用于物体的合外力矩  $\mathbf{M} = 0$ , 则角动量守恒, 即  $\mathbf{L} = \text{恒量}$ 。

对于质点, 有

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \text{恒量} \quad (1-30a)$$

对于刚体, 有

$$L = J\omega = \text{恒量} \quad (1-30b)$$

注意: 在有心力作用下, 质点对力心的角动量都是守恒的。

## 10. 牛顿定律

牛顿第一定律: 任何物体都保持静止或匀速直线运动状态, 直到外力迫使它改变这种状态为止。牛顿第一定律包含两个重要概念: ①任何物体都具有一种保持其原有运动状态不变的特性——惯性, 故也称为惯性定律; ②力是物体之间的一种相互作用, 它是改变物体运动状态的原因。

牛顿第一定律只对惯性参考系适用, 因而把第一定律成立的参考系称为惯性系。牛顿第一定律不能用实验直接验证, 它是在大量观察与经验的基础上, 经过抽象思维和逻辑推理得到的结果。

牛顿第二定律通常可表示为

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} \quad (1-31a)$$

式中,  $\mathbf{F}$  为作用在物体上的合外力,  $\mathbf{p}$  为物体的动量。牛顿本人对第二定律的表述是: 运动的变化与所加的动力成正比, 并且发生在该力所沿的直线的方向上。当物体运动速度  $\mathbf{v}$  远小于光速时,  $m$  可视为常量, 这时牛顿第二定律可写成

$$\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a} \quad (1-31b)$$

式中,  $\mathbf{F}$  为作用在物体上的合外力,  $\mathbf{a}$  为物体加速度。牛顿第二定律定量地确定了受力物体的加速度与其质量及加速度之间的关系。

应用牛顿第二定律时应注意:

① 牛顿第二定律表述的是力的瞬时作用规律, 加速度  $\mathbf{a}$  和所受合外力  $\mathbf{F}$  必须是同一时刻的瞬时量, 且有矢量关系。

② 牛顿第二定律只适用于质点或可化为质点的物体。

③ 牛顿第二定律只适用于惯性系，在非惯性系中，不能直接运用  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ ，而该式也是在研究对象运动速度远小于光速时得到的结论。

④ 具体应用  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$  时，往往用分量式处理，如在直角坐标系中用

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \Rightarrow \begin{cases} F_x = ma_x \\ F_y = ma_y \\ F_z = ma_z \end{cases} \quad (1-32)$$

的形式，而在自然坐标系中的形式为

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \Rightarrow \begin{cases} F_n = ma_n = m \frac{v^2}{r} \\ F_t = ma_t = m \frac{dv}{dt} \end{cases} \quad (1-33)$$

式中， $F_n$ ， $a_n$  和  $F_t$ ， $a_t$  分别表示法向和切向上的力和加速度。

牛顿第三定律：两个物体之间的作用力和反作用力在同一直线上，大小相等而方向相反。其数学表达式为

$$\mathbf{F} = -\mathbf{F}' \quad (1-34)$$

学习牛顿第三定律时应注意：

① 指出物体之间的作用力具有相互作用的特性，受力物体同时也是施力物体，反之亦然。作用力和反作用力总是成对出现，它们同时产生，同时存在，同时消失。作用力和反作用力总是属于同种性质的力。

②  $\mathbf{F}$ ， $\mathbf{F}'$  在同一直线上，但作用在不同物体上。二者同有同无永远不会相互抵消。

## 11. 功和能

### (1) 功

功是描述力对空间累积作用的物理量。功的大小等于力和位移的标积（即乘积为一标量），即

$$dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F \cos \alpha dr \quad (1-35)$$

式中， $\alpha$  为  $\mathbf{F}$  与  $d\mathbf{r}$  的夹角。

若质点在变力作用下，从  $a$  点沿曲线路径运动到  $b$  点，则变力在该过程中所做的功为

$$A = \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (1-36)$$

功是标量，它有正负之分。功的单位是 J（焦耳）。讲到功时，必须明确指出是哪个力对哪个物体做功，不能笼统地谈功。

力对定轴转动刚体所做的功表示为

$$A = \int_a^b dA = \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta \quad (1-37)$$

## (2) 保守力的功

重力、弹力和万有引力所做的功都与运动的路径无关，只与始末位置有关，即上述力做功的这一共同特点可以用下式表示：

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (1-38)$$

把具有这种特点的一类力称为保守力。因此，式(1-38)的物理意义是：保守力  $\mathbf{F}$  沿任意闭合路径一周所做的功为零。或者说，保守力做功与路径无关，只与始末位置有关。

重力、弹力、万有引力做功的关系式为

$$A = mgh_1 - mgh_2 = -(mgh_2 - mgh_1) = -\Delta E_p \quad (1-39a)$$

$$A = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 \quad (1-39b)$$

$$A = -\left( G \frac{m_1 m_2}{r_1} - G \frac{m_1 m_2}{r_2} \right) \quad (1-39c)$$

## (3) 动能

质点由于运动而具有的能量称为动能。质量为  $m$ ，速度为  $\mathbf{v}$  的质点的动能为  $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ 。

(狭义相对论中指出：当质点的运动速度接近真空中的光速  $c$  时，质点的质量将随速度而变化。此时，它的动能由相对论给出，为  $E_k = mc^2 - m_0c^2$ ，式中， $m_0$  为质点的静止质量， $m$  为运动质量。)

刚体定轴转动时具有的动能是指刚体上所有质点的动能之和，称为该刚体的定轴转动动能。质量为  $m$ ，定轴转动角速度为  $\omega$  的刚体的动能为

$$E_k = \sum \frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 \quad (1-40)$$

## (4) 势能

在物体系统中，物体之间或物体内部各部分之间由于相对位置而具有的能量称为势能，用  $E_p$  表示。势能是坐标的函数或称状态函数。

保守力的功  $W_c$  与势能  $E_p$  的关系是

$$W_c = -\Delta E_p = -(E_p - E_{p0}) \quad (1-41)$$

即系统内保守力所做的功等于系统势能增量的负值。式中,  $E_{p0}$  为初态势能,  $E_p$  为末态势能。

势能的共有性质有:

① 势能属于系统, 不是单个物体所具有。

② 势能具有相对性。式(1-41)仅定义了势能的增量或势能的差值。如果要求某点的势能, 就必须选择势能的零点。若在式(1-41)中选择  $E_{p0} = 0$ , 则任一点  $a$  的势能等于把物体从  $a$  点移到势能零点的过程中保守力所做的功, 即

$$E_{pa} = \int_a^0 \mathbf{F}_c \cdot d\mathbf{r} \quad (1-42)$$

对于重力势能, 通常取地面为零势能点; 对于弹性势能, 取平衡位置处为零弹性势能点, 取无穷远处为引力势能零点。这样, 这三种势能分别为

$$E_{p\text{重力}} = mgh \quad (1-43a)$$

$$E_{p\text{弹性}} = \frac{1}{2}kx^2 \quad (1-43b)$$

$$E_{p\text{引力}} = -G \frac{mM}{r} \quad (1-43c)$$

## 12. 质点的动能定理和质点系的动能定理

质点的动能定理: 合外力对质点所做的功  $A$  等于质点动能  $E_k$  的增量。其数学表达式为

$$A = \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = E_{kb} - E_{ka} = \Delta E_k \quad (1-44)$$

质点系的动能定理: 系统的外力做功  $A_e$  和内力做功  $A_i$  的总和等于系统动能  $\Delta E_k$  的增量。其数学表达式为

$$A_e + A_i = E_{kb} - E_{ka} = \Delta E_k \quad (1-45a)$$

## 13. 功能原理与机械能守恒定律

### (1) 质点系的功能原理

当系统从状态 I 变化到状态 II 时, 它的机械能的增量等于外力的功和非保守内力的功的总和。这个结论称为质点系的功能原理, 其数学表达式为

$$A_e + A_{id} = \Delta E_k + \Delta E_p = \Delta E \quad (1-45b)$$

式中,  $A_e$  为外力做的功,  $A_{id}$  为非保守内力做的功。

### (2) 机械能守恒定律

在一个孤立系统中, 当只有保守力做功, 其他内力和一切外力都不做功时, 则系统内各物体的动能和势能可以互相转换, 但机械能的总值不变。这个结论称为机械能守恒定律。其数学表达式为

$$\sum_i E_{ki} + \sum_i E_{pi} = \sum_i E_{ki0} + \sum_i E_{pi0} \quad (1-46a)$$

或

$$\Delta E_k = -\Delta E_p \quad (1-46b)$$

### (3) 能量守恒定律

一个孤立系统经历任何变化时, 该系统的所有能量的总和是不变的, 它只能从一种形式变为另一种形式, 或从系统内一个物体转移到另一个物体。能量既不能产生, 也不能消失, 这就是能量守恒定律。能量守恒定律是自然界中具有最大普适性的定律之一。

## 1.3 重点难点分析

### 1. 本章重点

力学部分的重点包括正确理解力学中建立的物体的理想模型(如质点、刚体), 掌握位置矢量、位移、速度、加速度等描述各物理过程的物理量的概念及运动方程, 以及相关物理量之间的关系; 掌握两类具体问题的处理: ①已知速度和加速度及初始条件, 求质点的运动方程, ②已知质点运动方程, 求质点的位移、速度、加速度等物理量; 正确理解几种常见力及其应用; 熟练掌握牛顿三条定律及其应用。

运动学部分的重点: ①掌握力对时间的累积作用、力对空间的累积作用的概念及物理过程; ②掌握质点系的运动、刚体运动的描述; ③掌握动量守恒定律、能量守恒定律; ④熟练掌握变力做功问题和变力的冲量问题, 能熟练应用功能关系解决一些简单的实际问题, 会应用动量原理和动量守恒定律。

### 2. 本章难点

本章的难点: ①对物理学中质点、质点系、刚体等物理模型的理解, 对本章中的物理概念、物理公式、定律的理解, 对矢量运算、微分和积分等数学知识的应用; 运用导数和积分求解变加速度、变力问题的思路和方法; ②运用相关坐标系表示物理矢量和物理矢量方程的思路与方法, 以及矢量方程的具体求解; ③理解参考系对描述运动的物理量和物理公式的重要性。

## 1.4 精选例题分析

**例 1-1** 一运动质点, 在某一时刻其位矢为  $\mathbf{r}$ , 在  $\Delta t$  时间内的路程为  $\Delta s$ , 下列各式中, 哪个能表示其平均速度、速度? 哪个表示其平均速率、速率?

(A)  $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$     (B)  $\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}$     (C)  $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$     (D)  $\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|$     (E)  $\frac{d|\mathbf{r}|}{dt}$     (F)  $\frac{\Delta s}{\Delta t}$

分析: 平均速度是矢量, 是在相应的时间  $\Delta t$  内位移对时间的比值; 速度是矢量, 为位置矢量对时间的一阶导数; 而速率是速度矢量的大小, 即速度的模。所以, (B) 是平均速度, (C) 是速度, (D) 是速率, (F) 是平均速率。(A)、(E) 无物理意义。

**例 1-2** 质点在平面上运动, 已知其位置矢量的表达式为  $\mathbf{r} = at^2\mathbf{i} + bt^2\mathbf{j}$  (式中  $a, b$  为常数), 则质点做 ( )。

(A) 匀速直线运动    (B) 变速直线运动    (C) 抛物线运动    (D) 一般曲线运动

分析: 质点运动的速度和加速度表示式为  $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 2at\mathbf{i} + 2bt\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 2a\mathbf{i} + 2b\mathbf{j}$ , 轨迹上任意一点处的斜率为  $\tan\alpha = \frac{y}{x} = \frac{2a}{2b} = \frac{a}{b}$ 。斜率为常数, 所以轨迹应为直线, 加速度大小恒定, 方向不变, 故质点做匀变速直线运动, 选 (B)。

**例 1-3** 一个质点沿  $x$  轴做直线运动, 其运动学方程为  $x = 3 + 6t + 8t^2 - 12t^3$ , 则

(1) 质点在  $t = 0$  时刻的速度  $v_0 =$  \_\_\_\_\_, 加速度  $a_0 =$  \_\_\_\_\_;

(2) 加速度为 0 时, 该质点的速度  $v =$  \_\_\_\_\_。

解: (1) 由速度、加速度的定义有

$$v = \frac{dx}{dt} = 6 + 16t - 36t^2, \quad a = \frac{dv}{dt} = 16 - 72t$$

当  $t = 0$  时,  $v_0 = 6\text{m/s}$ , 加速度  $a_0 = 16\text{m/s}^2$ 。

(2) 由加速度关系:  $a = 16 - 72t$ , 令  $a = 0$ , 则  $t = \frac{16}{72} = 0.22\text{s}$ , 代入速度关系有

$$v = 6 + 16 \times \frac{16}{72} - 36 \times \left(\frac{16}{72}\right)^2 = 7.8\text{m/s}$$

**例 1-4** 质点的运动方程为  $\mathbf{r}(t) = 8\cos(2t)\mathbf{i} + 8\sin(2t)\mathbf{j}$  (SI) 单位, 求: (1) 质点在任一时刻的速度和加速度的大小; (2) 质点的切向加速度和运动轨迹。

解: (1) 根据速度公式, 有

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -16\sin(2t)\mathbf{i} + 16\cos(2t)\mathbf{j}$$

则速度的大小为

$$v = |\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 16 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

根据加速度公式, 有

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -32 \cos(2t)\mathbf{i} - 16 \sin(2t)\mathbf{j}$$

则加速度的大小为

$$a = |\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 32 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

(2) 由运动方程

$$\begin{cases} r_x = x = 8 \cos(2t) \\ r_y = y = 8 \sin(2t) \end{cases}$$

消去参数  $t$  得运动轨迹方程

$$x^2 + y^2 = 64$$

由此可知, 质点做半径  $R = 8 \text{ m}$  的圆周运动, 则

$$\begin{cases} a_n = v^2 / R = 32 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \\ a_t = dv/dt = 0 \end{cases}$$

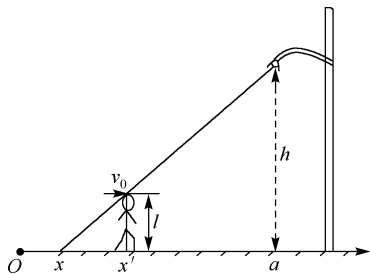


图 1.4 例 1-5 题图

**例 1-5** 路灯距离地面的高度为  $h$ , 一个身高为  $l$  的人在路上做匀速直线运动, 速度为  $v_0$ , 如图 1.4 所示, 求: (1) 人影中头顶的移动速度; (2) 影子长度增长的速率。

**分析:** 利用相似三角形的几何关系, 建立起人影中头顶点的运动学方程, 即可求得人影中头顶的移动和影子长度的变化规律。

**解:** (1) 设  $t$  时刻人位于  $x'$  处, 人影的头顶点位于  $x$  处, 由几何关系得

$$\frac{a - x}{h} = \frac{x' - x}{l}$$

即有

$$x = \frac{hx' - al}{h - l}$$

人影的头顶点移动的速度为

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{h}{h-l} \frac{dx'}{dt} = \frac{h}{h-l} v_0$$

式中,  $\frac{dx'}{dt} = v_0$  是人的运动速度。由于  $\frac{h}{h-l} > 1$ , 所以  $v > v_0$ , 即人影的头顶点移动得比人快。

(2) 人影的长度为

$$x' - x = x' - \frac{hx' - al}{h-l} = \frac{al - hx'}{h-l}$$

人影长度的变化率为

$$\frac{d(x' - x)}{dt} = -\frac{l}{h-l} v_0$$

上述变化率为负值表明, 随着人接近路灯, 人影长度将变短。

**例 1-6** 一质量为 1kg 的物体, 置于水平地面上, 物体与地面之间的静摩擦系数  $\mu_s = 0.20$ , 滑动摩擦系数  $\mu_k = 0.16$ , 现对物体施一水平拉力  $F = t + 0.96$  (SI), 则 2s 末物体的速度大小  $v =$  \_\_\_\_\_。

分析: 本题的物理过程涉及力对时间的累积效应, 即由力对时间的积分求出冲量, 再求速度。在  $0 \rightarrow 1s$  内,  $F < \mu_s mg = 1.96$ , 未拉动物体。当拉力大于(克服)最大静摩擦力后, 物体开始运动, 力对时间积累的效果称为合外力对物体在  $dt$  时间内的冲量。

**解法 1:** 在  $1s \rightarrow 2s$  内, 力的冲量为

$$I = \int_1^2 (t + 0.96) dt - \mu_k mg(t_2 - t_1) = 0.89 \text{ N} \cdot s$$

由冲量定理可得

$$v = I / m = 0.89 \text{ m/s}$$

**解法 2:** 由力  $F$  与静摩擦力相等时, 求出时间  $t$ , 即  $F = t + 0.96 = \mu_s mg$  时, 有  $t = 1$ 。当  $t \geq 1s$  时物体开始运动, 由牛顿第二定律可得

$$F - \mu_k mg = m \frac{dv}{dt}$$

分离变量, 再积分, 可得

$$\int_0^v dv = \int_1^2 (t + 0.96 - 0.16 \times 1 \times 9.8) dt$$

得

$$v = 0.89 \text{ m/s}$$

**例 1-7** 如图 1.5 所示, 水平地面上有一质量为  $M$  的物体, 静止于地面上。物体与地面间的静摩擦系数为  $\mu_s$ , 若要拉动物体, 问最小的拉力是多少? 沿何方向?

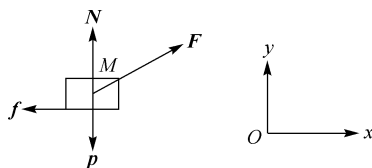


图 1.5 例 1-7 题图



分析：由于与运动有关的力矢量分布在二维空间，所以建立如图 1.5 所示的  $Oxy$  坐标系。确定研究对象为  $M$ ，经受力分析可知，物体受有重力  $\mathbf{P}$ ，拉力  $\mathbf{F}$ ，地面的支持力  $\mathbf{N}$ ，地面对它的摩擦力  $\mathbf{f}$ 。

解：由牛顿第二定律，可得

$$\mathbf{F} = \mathbf{P} + \mathbf{T} + \mathbf{N} + \mathbf{f} \Rightarrow \mathbf{P} + \mathbf{T} + \mathbf{N} + \mathbf{f} = M\mathbf{a}$$

沿直角坐标系的分量式为

$$x \text{ 分量: } F \cos \theta - f = Ma \quad (1)$$

$$y \text{ 分量: } F \sin \theta + N - P = 0 \quad (2)$$

物体启动时，有

$$F \cos \theta - f \geq 0 \quad (3)$$

物体刚启动时，摩擦力为最大静摩擦力，即  $f = \mu_s N$ ，由式②解出  $N$ ，求得  $f$  为

$$f = \mu_s (P - F \sin \theta) \quad (4)$$

把式④代入式③中，有

$$F \geq \mu_s Mg / (\cos \theta + \mu_s \sin \theta) \quad (5)$$

可见  $F = F(\theta)$ 。若要  $F = F_{\min}$ ，则要求分母  $(\cos \theta + \mu_s \sin \theta)$  最大。设  $A(\theta) = \mu_s \sin \theta + \cos \theta$ ，求

$$\frac{dA}{d\theta} = \mu_s \cos \theta - \sin \theta = 0$$

得到

$$\tan \theta = \mu_s$$

而  $\frac{d^2 A}{d\theta^2} = -\mu_s \sin \theta - \cos \theta < 0$ ，所以  $\tan \theta = \mu_s$  时， $A = A_{\max}$ ，即  $\theta = \arctan \mu_s$  时所用拉力最小。

代入式⑤中，得

$$F_{\min} = \mu_s Mg \sqrt{\left[ \mu_s^2 \frac{1}{\sqrt{1 + \mu_s^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \mu_s^2}} \right]} = \frac{\mu_s Mg}{\sqrt{1 + \mu_s^2}}$$

故  $\mathbf{F}$  方向与水平方向夹角为  $\theta = \arctan \mu_s$  时，所用拉力最小。

注意：解该题时注意受力分析，力学矢量（在直角坐标系中）分量式的表示，数学分析中导数的应用。

**例 1-8** 有一保守力  $\mathbf{F} = (-Ax + Bx^2)\mathbf{i}$ ，沿  $x$  轴作用于质点上，式中  $A$ 、 $B$  为常量， $x$ 、 $F$  的单位分别是 m、N。求：

(1) 当  $x = 0$  时， $E_p = 0$ ，试计算与此力相应的势能；

(2) 求质点从  $x = 2\text{ m}$  运动到  $x = 3\text{ m}$  时势能的变化。

分析: 在保守力场中任意一点  $a$  的势能等于把物体从  $a$  点移到势能零点的过程中, 保守力所做的功, 即  $E_{pa} = \int_a^0 \mathbf{F}_c \cdot d\mathbf{r}$ 。

解: (1) 已知势能零点位于坐标原点, 则  $x$  处的势能为

$$E_{px} = A_{x0} = \int_x^0 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int_x^0 (-Ax + Bx^2) dx = \frac{A}{2}x^2 - \frac{B}{3}x^3$$

(2) 质点由  $x = 2\text{ m}$  运动到  $x = 3\text{ m}$  时势能的增量为

$$\Delta E_p = E_p|_{x=3} - E_p|_{x=2} = \frac{5}{2}A - \frac{19}{3}B$$

保守力做的功为

$$A = \int_2^3 F dx = -\left(\frac{5}{2}A - \frac{19}{3}B\right)$$

可见, 保守力做的功等于势能增量的负值, 即  $A = -\Delta E_p$ 。

**例1-9** 在水平冰面上以一定速度向东行驶的炮车, 朝斜向上方向发射一枚炮弹, 对于炮车和炮弹这一系统, 在此过程中 (忽略冰面摩擦力及空气阻力) ( )。

- (A) 总动量守恒
- (B) 总动量在炮身前进的方向上的分量守恒, 其他方向的动量不守恒
- (C) 总动量在水平面上任意方向的分量守恒, 竖直方向分量不守恒
- (D) 总动量在任何方向的分量均不守恒

分析: 取炮车和炮弹为一系统, 在发射炮弹过程中, 所受外力为重力和地面支持力, 均是垂直方向, 在水平方向不受外力作用, 所以总动量在水平面上任意方向的分量守恒, 竖直方向分量不守恒, 总动量不守恒, 选 (C)。

**例1-10** 在一半径为  $R$ , 质量为  $m$  的静止水平圆盘的边上, 站着一个质量为  $m'$  的人, 圆盘可绕通过中心的竖直轴转动, 转轴与轴承之间的摩擦阻力可忽略不计。当人沿圆盘边缘走一周回到盘上原始位置时, 圆盘将转过多大角度?

分析: 取人和圆盘为定轴转动系统, 系统的角动量守恒。注意, 守恒定律中人和圆盘的角速度都相对于同一惯性参考系, 人相对圆盘边缘走一周时, 人相对地转过的角度与圆盘转过的角度之和为  $2\pi$ 。

解: 人、圆盘系统对竖直轴的角动量守恒, 开始时, 人和圆盘都静止, 设  $t$  时刻人相对地的角速度为  $\omega_1$ , 盘相对于地的角速度为  $\omega$ 。

由角动量守恒, 得

$$0 = J\omega + J_1\omega_1 = \frac{1}{2}mR^2\omega + m'R^2\omega_1$$

得

$$\omega = -\frac{2m'}{m}\omega_1$$

负号表示圆盘和人绕轴转动的角速度方向相反，上式可表示为

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{2m'}{m} \frac{d\theta_1}{dt}$$

式中， $d\theta$  为  $dt$  时间内圆盘相对地转过的角度， $d\theta_1$  则为人相对地转过的角度，对上式积分，可得

$$\Delta\theta = -\frac{2m'}{m}\Delta\theta_1$$

人沿盘走一周时，应有  $\Delta\theta + (-\Delta\theta) = 2\pi$ ，所以，圆盘相对地转过的角度为

$$\Delta\theta = -\frac{2m'}{m+2m} \times 2\pi$$

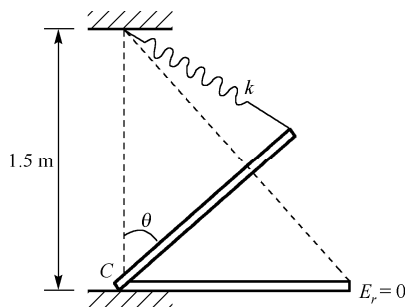


图 1.6 例 1-11 题图

**例 1-11** 如图 1.6 所示，一轻弹簧与一匀质细杆  $l = 1\text{m}$  相连，弹簧倔强系数  $k = 40\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$ ，细杆质量为  $m = 3\text{kg}$ ，杆可绕  $C$  轴无摩擦转动，且当  $\theta = 0$  时，弹簧为原长。问：细杆在  $\theta = 0$  的位置时至少应具有的角速度才能使其转到水平位置？

**分析：**由题可知杆绕  $C$  轴无摩擦转动，所以轴承摩擦力为零，此时杆在转动过程中只有重力和弹簧弹性力做功，因而杆、地球和弹簧系统机械能守恒。

**解：**取弹簧、杆、地为系统。系统在  $\theta = 0$  位置的机械能为

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}J\omega^2 + mgh_c$$

系统在  $\theta = 90^\circ$  位置时的机械能为

$$E = E_p = \frac{1}{2}kx^2$$

$$E = E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k\left(\sqrt{1.5^2 + 1 - 0.5}\right)^2$$

由机械能守恒，得

$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}J\omega^2 + mgh_c$$

将  $k = 40\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$ ， $m = 3\text{kg}$  及  $x$ （弹簧伸长量）， $h_c$ （质心高度）代入，得

$$\omega = 6.18\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

## 1.5 习题

1.1 一质点的运动方程为  $x = 3t + 5$ ,  $y = 0.5t^2 + 3t - 4$  (其中  $x$ 、 $y$  的单位为  $\text{m}$ ,  $t$  的单位为  $\text{s}$ )。以  $t$  为变量, 位置矢量的表达式为\_\_\_\_\_, 它的轨迹方程为\_\_\_\_\_, 质点在  $t = 4\text{s}$  时的速度为\_\_\_\_\_, 加速度为\_\_\_\_\_。

1.2 一质点沿半径为  $1\text{m}$  的圆周运动, 它通过的弧长  $S$  的变化规律为  $S = t + 2t^2$  ( $t$  的单位为  $\text{s}$ )。问该质点在  $2\text{s}$  末的速率为\_\_\_\_\_; 切向加速度为\_\_\_\_\_; 法向加速度为\_\_\_\_\_。

1.3 质量为  $m$  的质点在流体中做直线运动, 受到与速度成正比的阻力  $kv$  ( $k$  为常数) 作用。  $t = 0$  时刻质点的速度为  $v_0$ , 则  $t$  时刻的速度为\_\_\_\_\_;  $0$  到  $t$  时间内经过的距离为\_\_\_\_\_; 停止运动前经过的距离为\_\_\_\_\_。

1.4 在质点运动中, 已知  $x = ae^{-kt}$ ,  $\frac{dy}{dt} = -bke^{-kt}$ ,  $y|_{t=0} = b$ 。则质点的加速度为\_\_\_\_\_; 其轨道方程为\_\_\_\_\_。

1.5 下列表述中正确的是 ( )。

- (A) 质点做圆周运动时, 加速度方向总是指向圆心
- (B) 质点做抛体运动时, 由于加速度恒定, 所以加速度的切向分量和法向分量也是恒定的
- (C) 质点做曲线运动时, 加速度方向总是指向曲线凹的一侧
- (D) 质点做曲线运动时, 速度的法向分量总是零, 加速度的法向分量也应是零

1.6 质点沿半径为  $R$  的圆周做变速运动, 在任一时刻质点加速度大小为 [其中  $v = v(t)$  表示任一时刻质点的速率] ( )。

- (A)  $\frac{dv}{dt}$       (B)  $\frac{v^2}{R}$       (C)  $\frac{dv}{dt} + \frac{v^2}{R}$       (D)  $\left[ \left( \frac{dv}{dt} \right)^2 + \left( \frac{v^2}{R} \right)^2 \right]^{1/2}$

1.7 在一个无风天气的雨天, 一辆汽车以  $20\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$  的速度前进, 车内乘客看见玻璃上雨滴下落方向与竖直方向成  $75^\circ$  (如图 1.7 所示), 求雨滴下落的速度 (设雨滴做匀速运动)。

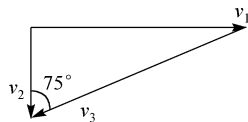


图 1.7 习题 1.7 图

1.8 倾角为  $30^\circ$  的一个斜面体放置在水平桌面上。一个质量为  $2\text{kg}$  的物体沿斜面下滑, 下滑的加速度为  $3\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ 。若此时斜面体静止在桌面上不动, 则斜面体与桌面间的静摩擦力  $f =$ \_\_\_\_\_。

1.9 一小珠可以在半径为  $R$  的竖直圆环上做无摩擦滑动。今使圆环以角速度  $\omega$  绕圆环竖直直径转动。要使小珠离开环的底部而停在环上某一点, 则角速度  $\omega$  最小应为\_\_\_\_\_。

1.10 假设作用在一质量为  $10\text{kg}$  的物体上的力, 在  $4\text{s}$  内均匀地从  $0$  增加到  $50\text{N}$ , 使物体沿力的方向由静止开始做直线运动, 则物体最后的速率  $v = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

1.11 一质量为  $M$  的质点沿  $x$  轴正向运动, 假设该质点在  $x=0$  时, 速度  $v_0=0$ , 且通过坐标为  $x$  的位置时速度的大小为  $v=kx$  ( $k$  为正值常量), 则此时作用于该质点上的力  $F = \underline{\hspace{2cm}}$ , 该质点从  $x=x_0$  点出发运动到  $x=x_1$  处所经历的时间  $\Delta t = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

1.12 一物体按  $x=ct^2$  的规律做直线运动, 设介质对物体的阻力正比于速度的平方, 设比例系数为  $k$ , 求物体从  $x=0$  到  $x=l$  时, 阻力所做的功。

1.13 设作用在质量为  $1\text{kg}$  的物体上的力  $F=6t+3$  (SI), 如果物体在该力的作用下, 由静止开始沿直线运动, 在  $0$  到  $2\text{s}$  的时间间隔内, 力作用在物体上的冲量大小  $I = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

1.14 一质量为  $m$  的物体, 以初速  $v_0$  从地面抛出, 抛射角  $\theta=30^\circ$ , 如忽略空气阻力, 则从抛出到刚要接触地面的过程中物体动量增量的大小为  $\underline{\hspace{2cm}}$ , 物体动量增量的方向为  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

1.15 一个人站在平板车上掷铅球, 人和车总质量为  $M$ , 铅球的质量为  $m$ , 平板车可沿水平、光滑的直轨道移动。设铅直平面为  $xy$  平面,  $x$  轴与轨道平行,  $y$  轴正方向竖直向上。已知未掷球时, 人、车、球皆静止。球出手时沿斜上方, 它相对于车的初速度在  $xy$  平面内, 其大小为  $v_0$ , 方向与  $x$  轴正向的夹角为  $\underline{\hspace{2cm}}$ , 人在掷球过程中对车无滑动, 则球被抛出之后, 车对地的速度  $V = \underline{\hspace{2cm}}$ , 球对地的速度  $v = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

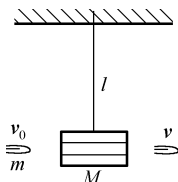


图 1.8 习题 1.16 图

1.16 质量为  $M=1.5\text{kg}$  的物体, 用一根长为  $l=1.25\text{m}$  的细绳悬挂在天花板上, 如图 1.8 所示。今有一质量为  $m=10\text{g}$  的子弹以  $v_0=500\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$  的水平速度射穿物体, 刚穿出物体时子弹的速度大小为  $v=30\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ , 假设穿透时间极短, 求:

- (1) 子弹刚穿出时绳中张力的大小;
- (2) 子弹在穿透过程中所受的冲量。

1.17 质量为  $m$  的一只狗, 站在质量为  $M$  的一条静止在湖面的船上, 船头垂直指向岸边, 狗与岸边的距离为  $S_0$ 。这只狗向着湖岸在船上走过  $l$  的距离停下来, 求这时狗离湖岸的距离  $S$  (忽略船与水的摩擦阻力)。

1.18 如图 1.9 所示, 用传送带  $A$  输送煤粉, 料斗口在  $A$  上方高  $h=0.5\text{m}$  处, 煤粉自料斗口自由落在  $A$  上。设料斗口连续卸煤的流量为  $q_m=40\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$ ,  $A$  以  $v=2.0\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$  的水平速度匀速向右移动。求装煤的过程中, 煤粉对  $A$  的作用力的大小和方向 (不计相对传送带静止的煤粉重量)。

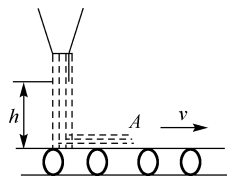


图 1.9 习题 1.18 图

1.19 假设卫星环绕地球中心做圆周运动, 则在运动过程中, 卫星对地球中心的 ( )。

- (A) 角动量守恒, 动能也守恒      (B) 角动量守恒, 动能不守恒

- (C) 角动量不守恒, 动能守恒 (D) 角动量不守恒, 动量也不守恒  
(E) 角动量守恒, 动量也守恒

1.20 如图 1.10 所示, 钢球  $A$  和  $B$  质量相等, 正被绳牵着以  $\omega = 4\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$  的角速度绕竖直轴转动, 二球与轴的距离都为  $r_1 = 15\text{cm}$ 。现在把轴上环  $C$  下移, 使得两球离轴的距离缩减为  $r_2 = 5\text{cm}$ 。则钢球的角速度  $\omega =$  \_\_\_\_\_。

1.21 一圆盘正绕垂直于盘面的水平光滑固定轴  $O$  转动。如图 1.11 所示, 射来两个质量相同、速度的大小相同而方向相反, 并在同一条直线上的子弹。子弹射入并且停留在圆盘内, 则子弹射入的瞬间, 圆盘的角速度  $\omega$  ( )。

- (A) 增大 (B) 不变 (C) 减小 (D) 不能确定

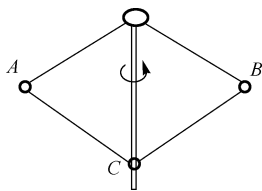


图 1.10 习题 1.20 图

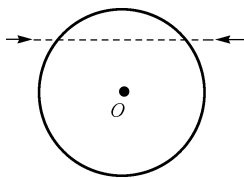


图 1.11 习题 1.21 图

1.22 一砂轮直径为  $1\text{m}$  质量为  $50\text{kg}$ , 以  $900\text{rad/min}$  的转速转动。撤去动力后, 一工件以  $200\text{N}$  的正压力作用在轮边缘上, 使砂轮在  $11.8\text{s}$  内停止。求砂轮和工件间的摩擦系数 (砂轮轴的摩擦可忽略不计)。砂轮绕轴的转动惯量为  $\frac{1}{2}mR^2$ , 其中  $m$  和  $R$  分别为砂轮的质量和半径。

1.23 某种电动机起动后转速随时间变化的关系为  $\omega = \omega_0(1 - e^{-t/\tau})$ , 式中  $\omega_0 = 9.0\text{s}^{-1}$ ,  $\tau = 2\text{s}$ 。求: (1)  $t = 6.0\text{s}$  时的转速; (2) 角加速度随时间变化的规律; (3) 启动后  $6.0\text{s}$  内转过的圈数。

1.24 我国 1970 年 4 月 24 日发射的第一颗人造卫星, 其近地点为  $4.39 \times 10^5\text{m}$ 、远地点为  $2.38 \times 10^6\text{m}$ 。试计算卫星在近地点和远地点的速率 (设地球半径为  $6.38 \times 10^6\text{m}$ )。

1.25 质量为  $0.50\text{kg}$ , 长为  $0.40\text{m}$  的均匀细棒, 可绕垂直于棒的一端水平轴转动。如将此棒放在水平位置, 然后任其落下, 如图 1.12 所示。求: (1) 当棒转过  $60^\circ$  时的角加速度和角速度; (2) 下落到竖直位置时的动能; (3) 下落到竖直位置时的角速度。

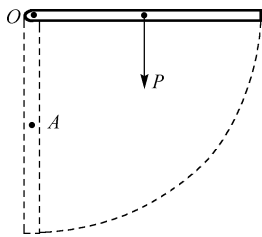


图 1.12 习题 1.25 图

## 第2章 振 动

振动是物质运动的一种基本形式，广义地讲，任何一个描述物体运动状态的物理量在某一数值附近反复地变化都可称为振动。振动现象在自然界中是广泛存在的。物体在一定位置附近所做的来回往复运动称为机械振动。机械运动有利有弊，人们可利用其有利的一面，如选矿、混凝土捣碎机等就是利用振动原理设计而成的；但其有害的一面也可能造成损失。

振动的形式多种多样，在不同的振动现象中，最简单、最基本的振动是谐振动，它是某些实际振动的近似，也是一种理想化的模型，任何复杂的运动都可视为若干谐振动的叠加。研究简谐运动是进一步研究复杂振动的基础。因此，本章要求掌握描述简谐运动的物理量，以及简谐运动的特征和定义。

### 2.1 学习要求

#### 1. 简谐运动

(1) 了解简谐运动的动力学特征；理解简谐运动的运动学特征；掌握简谐运动的4种运动学方程表达式，并且熟练掌握相关的计算。

(2) 理解描述简谐运动3个特征量（周期、频率、相位）的物理意义。

(3) 重点掌握研究简谐运动的旋转矢量表示法。

(4) 掌握简谐运动的能量变化特征。

#### 2. 一维简谐运动的合成

(1) 理解同频率与异频率时的一维简谐运动的合成；掌握运用解析法与旋转矢量图法求解一维简谐运动的合成。

(2) 理解“拍”现象的形成原因，掌握拍频的物理特征。

(3) 了解阻尼振动、受拍振动与共振的力学与运动学特征及规律。

### 2.2 内容提要

#### 1. 基本概念

##### (1) 简谐运动

物体运动时，如果离开平衡位置的位移（或角位移）按余弦函数（或正弦函数）的规律随时间变化，这种运动称为简谐运动。

## (2) 描述简谐运动的 3 个特征量

振幅  $A$ : 在简谐运动方程  $x = A \cos(\omega t + \varphi)$  中, 因  $\cos(\omega t + \varphi)$  的值在 +1 和 -1 之间, 所以物体的位移亦在  $+A$  和  $-A$  之间, 把做简谐运动的物体偏离平衡位置最大位移的绝对值  $A$  称为振幅。记为

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \quad (2-1a)$$

式中,  $x_0$ 、 $v_0$  为  $t=0$  时的位置和速度。也可由任意时刻的位置  $x$  和速度  $v$  确定, 即

$$A = \sqrt{x^2 + \frac{v^2}{\omega^2}} \quad (2-1b)$$

周期  $T$  和频率  $\nu$ : 物体完成一次完整振动所经历的时间称为周期, 用  $T$  表示, 单位为 s; 单位时间内物体所做的完全振动的次数称为频率, 用  $\nu$  表示, 它的单位名称是赫兹, 符号是 Hz。周期与频率成倒数关系, 数学表示为

$$\nu = \frac{1}{T} \quad (2-2)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (2-3)$$

由此还可知

$$\omega = 2\pi\nu \quad (2-4)$$

即  $\omega$  等于物体在单位时间内所做的完全振动次数的  $2\pi$  倍,  $\omega$  称为角频率 (又称圆频率), 单位是  $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$  (弧度每秒)。

相位: 当物体做简谐运动的振幅  $A$  和角频率  $\omega$  一定时, 振动物体在任意时刻的位置、速度、加速度都由  $(\omega t + \varphi)$  决定, 也就是说,  $(\omega t + \varphi)$  能反映振动物体在任一时刻的运动状态。因而, 定义  $(\omega t + \varphi)$  为简谐运动的相位 (也称位相或周相)。对某一给定的系统来说, 只要知道某时刻的相位, 就可以立即求出其位置和速度, 即知道此时系统的运动状态。可见, 相位是决定任意时刻谐振动物体运动状态的物理量。

初相位: 当  $t=0$  时,  $(\omega t + \varphi) = \varphi$ , 故  $\varphi$  称为初相位, 简称为初相。它是决定振动物体初始时刻运动状态的物理量。

相位差: 两同频率简谐运动的相位之差称为相位差, 用  $\Delta\varphi$  表示, 即

$$\Delta\varphi = (\omega t + \varphi_2) - (\omega t + \varphi_1) = \varphi_2 - \varphi_1 \quad (2-5)$$

可见两同频率的简谐运动在任意时刻的相位差, 都等于其初相差。

## 2. 简谐运动方程及基本特征

### (1) 动力学特征

简谐运动系统受力必有以下形式:



$$F = -kx \quad (2-6a)$$

或小角度的单摆（当  $\theta$  很小，满足  $\sin \theta \approx \theta$  时）

$$F = -mg \sin \theta \approx -mg\theta = ml \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (2-6b)$$

这种力称为弹性力或回复力。上两式表明：力的大小与物体的位置（或角位置）成正比，负号表明力的方向始终指向平衡位置。

因此，简谐运动的运动微分方程（或简谐运动的动力学方程）有如下形式：

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad (2-7a)$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_\theta^2 \theta = 0 \quad (2-7b)$$

式中， $\omega = \frac{k}{m}$ ， $\omega_\theta = \frac{g}{l}$  是由系统本身性质所决定的常量，所以简谐运动的动力学特征是振动系统所受的满足式（2-6a）的弹性力或满足式（2-6b）的回复力。式（2-7a）、式（2-7b）是简谐运动的普遍定义式，在机械运动、无线电、光学等领域普遍适用，且  $\omega^2$  取决于系统本身的性质。

## （2）运动学特征

根据运动学方程的定义，可以确定简谐运动系统的运动方程  $x = x(t)$  或  $\theta = \theta(t)$ ，求解式（2-7a）、式（2-7b），分别有

$$x = A_x \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (2-8a)$$

$$\theta = \theta_m \cos(\omega t + \varphi'_0) \quad (2-8b)$$

式中， $A_x$ 、 $\theta_m$  和  $\varphi_0$ 、 $\varphi'_0$  为待定常数，就是前面提到的振幅和初相。它们由振动系统的初始条件决定。

## （3）运动学方程的 4 种表达方式

以弹簧振子为例：由  $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$  微分求解，得

$$x = A_x \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (2-9a)$$

$$x = A \sin\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right) = A \sin(\omega t + \varphi'_0) \quad (2-9b)$$

$$x = A e^{i(\omega t + \varphi_0)} \quad (2-9c)$$

$$x = A \cos\left(\frac{2\pi}{T} t + \varphi_0\right) \quad \text{或} \quad x = A \cos(2\pi \nu t + \varphi_0) \quad (2-9d)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (2-10)$$

速度的幅值（绝对值最大）为  $v_m = \omega A$ 。

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x \quad (2-11)$$

加速度幅值（绝对值最大）为  $a_m = \omega^2 A$ 。

由位移  $x$  的初始值  $x_0 = A \cos \varphi_0$ ，速度  $v$  的初始值  $v_0 = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin \varphi_0$ （请思考并推导）

确定两个积分常数，求解得到

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}, \quad \varphi_0 = \arctan\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right)$$

### 3. 简谐运动的旋转矢量表示法

简谐运动三个特征量的物理意义可用旋转矢量方法表示。如图 2.1 所示，设有一长度为  $A$  的矢量  $\overline{OM}$  在平面内绕  $O$  点以匀角速率  $\omega$  逆时针旋转，并设初始时刻（ $t=0$ ）该矢量的位置与  $Ox$  轴之间的夹角为  $\varphi$ ，则任意时刻  $t$ ，矢量  $\overline{OM}$  与  $Ox$  之间的夹角为  $(\omega t + \varphi)$ ，与做简谐运动的物体在该时刻的相位相同，矢量  $\overline{OM}$  的端点  $M$  在  $Ox$  轴上的投影点  $P$  的位置为

$$x = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (2-12)$$

显然， $\overline{OM}$  匀速转动时，其端点  $M$  在  $Ox$  轴上的投影点  $P$  的运动是简谐运动。 $\overline{OM}$  为旋转矢量，其长度就是简谐运动的振幅，转动的角速度就是简谐运动的圆频率。

旋转矢量表示法的优点是可以直观、形象地表示简谐运动的三个特征量，方便求解简谐运动方程。用旋转矢量还可以表示简谐运动的速度和加速度。做匀速圆周运动的质点的速率  $v_m = \omega A$ ，向心加速度  $a_n = \omega^2 A$ ，在  $t$  时刻它们在  $x$  轴上的投影分别为

$$v = -v_m \sin(\omega t + \varphi) = -\omega A \sin(\omega t + \varphi) \quad (2-13)$$

$$a = -a_n \cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi) \quad (2-14)$$

**思考题：**思考简谐运动物体的位移  $x$ 、速度  $v$ 、加速度  $a$  三者的关系图。

### 4. 简谐运动的能量（以弹簧振子为例）

简谐运动系统的动能、势能都随时间变化，动能达到最大值时，势能为零，势能达到最大值时，动能为零。但系统的总机械能守恒，即  $E = E_k + E_p = \text{常量}$ 。

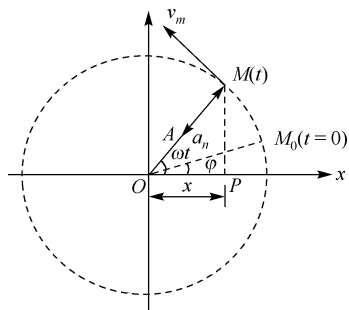


图 2.1 旋转矢量表示方法

$$\text{动能:} \quad E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi) \quad (2-15)$$

$$\text{弹性势能:} \quad E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \varphi) \quad (2-16)$$

$$\text{机械能:} \quad E = E_k + E_p = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \quad (2-17)$$

## 5. 简谐运动的合成

### (1) 两个同频率的一维简谐运动的合成

函数运算法：空间某一质点同时参与沿同一方向（ $x$  轴）的两个独立的同频率的简谐运动位移方程为

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_{10})$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_{20})$$

用三角函数运算可得它们的合振动方程为

$$x = x_1 + x_2 = A \cos(\omega t + \varphi)$$

可见合成后的运动仍然是频率不变的简谐运动，其中合振幅  $A$  和合振动的初相  $\varphi$  为

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_{20} - \varphi_{10})} \quad (2-18)$$

$$\tan \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_{10} + A_2 \sin \varphi_{20}}{A_1 \cos \varphi_{10} + A_2 \cos \varphi_{20}} \quad (2-19)$$

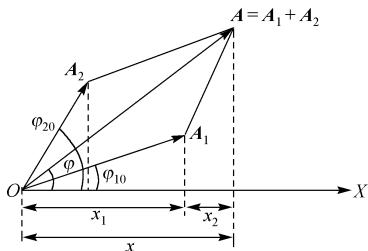


图 2.2 两个同方向同频率的谐振动的合成

旋转振幅矢量图法：如 2.2 图所示， $A_1$  与  $A_2$  代表初始时刻两个同方向同频率的谐振动， $A = A_1 + A_2$ ，因  $A_1$  与  $A_2$  频率相同，故  $A_1$  与  $A_2$  以相同的角速度逆时针旋转时，其合矢量  $A$  也将同步旋转，且矢量的长度不变，则合振动的表达式可由矢量  $A$  在  $Ox$  轴上的投影给出。

当两振动的相位差  $\varphi_{20} - \varphi_{10} = 2k\pi$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) 时， $A = A_1 + A_2$ ，合振动最大，如图 2.3(a)所示。

当两振动的相位差  $\varphi_{20} - \varphi_{10} = (2k+1)\pi$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) 时， $A = |A_1 - A_2|$ ，合振动反相叠加，合振幅最小，如图 2.3(b)所示。

对于一般情况，合振幅介于  $A = A_1 + A_2$  和  $A = |A_1 - A_2|$  之间，如图 2.3(c)所示。

## (2) 两个不同频率的一维谐振动的合成

当  $\omega_1 \neq \omega_2$  时, 合振动的振幅  $A$  和角速度  $\omega$  均为时间的函数, 这种情形表现为非简谐运动。

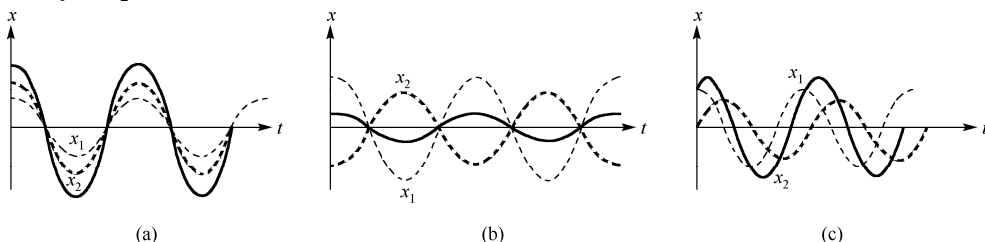


图 2.3 两简谐运动的相位差关系

当  $\omega_1 \approx \omega_2$  时, 合振动振幅  $A$  不再是等幅振动, 而是随时间发生周期性变化, 时而加强, 时而减弱, 这个现象称为拍。其振幅变化的频率, 称为拍频, 表达式为

$$\nu = \frac{1}{\tau} = \left| \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\pi} \right| = |\nu_2 - \nu_1| \quad (2-20)$$

有关“拍”的特征分析, 设两个相近的角频率, 且  $\omega_1 < \omega_2$ , 初相位相同的谐振动方程为

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_0)$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_0)$$

若考虑  $A_1 = A_2$ , 则由合振动方程解得为

$$x = 2A \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t + \varphi_0\right) \quad (2-21)$$

在式 (2-21) 中, 若  $\omega_2 - \omega_1$  远小于  $\omega_1$  或  $\omega_2$ , 式中第一项因子  $2A \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right)$  表示振幅随时间缓慢周期性地变化。第二项因子  $\cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t + \varphi_0\right)$  可视为角频率为  $\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} \approx \omega_1 \approx \omega_2$  的简谐运动。因此, 合振动的特点是可近似看成角频率为  $\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} \approx \omega_1 \approx \omega_2$ , 振幅为  $2A \cos\left|\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right|$  的简谐运动, 此时振动出现时强时弱的拍现象, 如图 2.4 所示。

## 6. 阻尼振动、受迫振动和共振

## (1) 阻尼振动

振动物体受到阻力作用时, 振动系统的能量不断减小, 因而振幅也随时间而减小, 这种在回复力和阻力作用下的振动, 称为阻尼振动。

若振动物体的质量为  $m$ ，在弹性力（或准弹性力）和阻力作用下运动，则物体的运动学方程为

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - \gamma \frac{dx}{dt} \quad (2-22a)$$

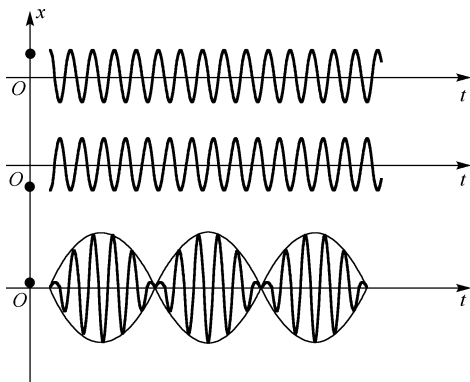


图 2.4  $\omega_1 \approx \omega_2$  时，振动出现时强时弱的拍现象

或

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad (2-22b)$$

式中， $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ ， $\frac{\gamma}{m} = 2\delta$ ， $\omega_0$  为无阻尼时振子的固有角频率， $\delta$  为阻尼系数，在弱阻尼（ $\delta < \omega_0$ ）的情况下，微分方程式（2-22b）的解为

$$x = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega' t + \varphi'_0) \quad (2-23)$$

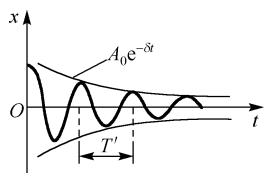


图 2.5 阻尼振动的准周期振动

式中， $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ ， $A_0$  和  $\varphi'_0$  为积分常数。余弦项表征了在弹性力和阻力作用下的周期运动， $e^{-\delta t}$  反映了阻尼对振幅的影响，因此阻尼振动是准周期振动，如图 2.5 所示。

## （2）受迫振动

受迫振动是指物体在周期性外力的持续作用下发生的振动。受迫振动稳定后，外力做功提供的能量等于系统克服阻尼所消耗的能量，因而受迫振动的振幅能保持不变，也是等幅振动。受迫振动与简谐运动的区别在于，简谐运动的角频率由系统本身的性质决定，而受迫振动的角频率等于驱动力的角频率，一般驱动力形式为

$$F = F_0 \cos \omega_d t$$

运动方程为

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega_d t \quad (2-24a)$$

式中,  $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ ,  $\frac{\gamma}{m} = 2\delta$ 。当阻尼较小时, 式 (2-24a) 的解为

$$x = A_0 e^{-\delta t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} t + \varphi'_0) + A \cos(\omega_d t + \varphi) \quad (2-24b)$$

其中,  $A e^{-\delta t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} t + \varphi'_0)$  为衰减项, 一段时间后, 此项可忽略。第二项  $A \cos(\omega_d t + \varphi)$  为稳态项, 是一个等幅振动。

受迫振动的振幅、稳态受迫振动的位移和驱动力的相位差分别为

$$A = \frac{F_0}{m \sqrt{\omega_0^2 - \omega_d^2 + 4\delta^2 \omega_d^2}} \quad (2-25)$$

$$\tan \varphi = -\frac{2\delta \omega_d}{\omega_0^2 - \omega_d^2}$$

受迫振动能量特征: 一方面周期性驱动力为振动系统提供能量, 另一方面系统又因阻尼而消耗能量, 若二者相等, 则系统达到稳定振动状态。

### (3) 共振

对于受迫振动, 当外力幅值恒定, 稳定态振幅随驱动力的频率而变化。当驱动力的角频率等于某个特定值时, 受迫振动的振幅或速率达到最大值的现象称为共振。

通过求位移振幅对  $\omega_d$  求导, 令  $\frac{dA}{d\omega_d} = 0$ , 得到共振时的角频率 (共振频率  $\omega_r$ ) 为

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} \quad (2-26)$$

可见, 位移共振时, 驱动力的频率略小于系统的固有角频率  $\omega_0$ 。阻尼越小,  $\omega_r$  越接近于固有频率  $\omega_0$ , 共振位移幅值越大。

受迫振动的速度在一定条件下也可以发生共振, 称为速度共振。将速度振幅对  $\omega_d$  求导, 令  $\frac{dv_m}{d\omega_d} = 0$ , 得

$$\omega_{r'} = \omega_0 \quad (2-27)$$

式 (2-27) 表明: 驱动力的频率等于系统固有频率时, 速度幅值达到最大; 在给定幅值的周期性外力的作用下, 阻尼越小, 速度幅值越大, 如图 2.6 所示。

## 7. LC 振荡器

物理学中的振动不仅有物体的机械振动, 还有电磁振动, LC 振荡器就是一个非力学

的简谐运动。如图 2.7 所示是一个 LC 振荡电路，它是把一个电容为  $C$  的已充电电容器与一个自感系数为  $L$  的线圈连在一起构成的回路。

若不考虑电路中的焦耳损耗，即忽略电阻，则 LC 振荡方程为

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \omega^2 q = 0 \quad (2-28)$$

解得

$$q = q_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad (2-29)$$

于是

$$i = \frac{dq}{dt} = -\omega q_0 \sin(\omega t + \varphi) = -I_0 \sin(\omega t + \varphi) \quad (2-30)$$

电荷  $q$  和电流  $i$  都随时间周期性变化，即产生电磁振荡。 $\omega = \frac{1}{LC}$  称为 LC 振荡电路的自由振荡角频率。

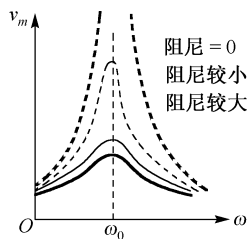


图 2.6 速度共振

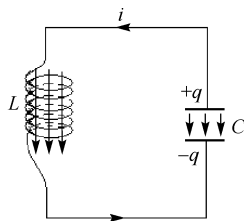


图 2.7 LC 振荡电路

说明：在电路中，电流、电压、电荷量、电场强度和磁场强度等物理量都可能在某一定值附近随时间周期性地变化，这类变化统称为振动，即电磁振荡。电磁振荡与机械振动有相似的规律。

## 2.3 重点难点分析

### 1. 本章重点

本章的重点是掌握谐振动的特征、运动学方程及其应用；掌握谐振动的描述方法和规律；同时掌握谐振动的合成分解。突出振动的共性，掌握电磁振荡的规律。

### 2. 本章难点

理解简谐运动  $x = A \cos(\omega t + \varphi)$  的相位  $(\omega t + \varphi)$  的概念，以及初相位  $\varphi$  的确定。理解相位决定振动物体在任意时刻的位置和速度，即运动状态，以及  $t = 0$  时的初相决定振动物体初始时刻的运动状态。运用旋转矢量图示法分析简谐运动也是本章难点。

## 2.4 精选例题分析

**例 2-1** 已知两个简谐运动的运动方程分别为  $y_1 = 5\cos(\omega t + \pi/2)$ ,  $y_2 = 10\cos(\omega t + \pi)$ , 式中  $y_1$  和  $y_2$  以厘米为单位,  $t$  以秒为单位, 画出两简谐运动的图像, 说明相位差是多少, 哪个超前。

**解:**  $y_1$  和  $y_2$  的振动曲线如图 2.8 中的 I、II 所示, 则相位差为

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{2}$$

即  $y_2$  比  $y_1$  超前  $\pi/2$ 。

**例 2-2** 一轻弹簧在 60N 的拉力下伸长 30cm。现把质量为 4kg 的物体悬挂在该弹簧的下端并使之静止, 再把物体向下拉 10cm, 然后由静止释放并开始计时。求: (1) 物体的振动方程; (2) 物体在平衡位置上方 5cm 时弹簧对物体的拉力; (3) 物体从第一次越过平衡位置时刻起到它运动到上方 5cm 处所需要的最短时间。

**分析:** 由弹簧受力及伸长可确定特征常量, 再确定出该振动的初相位。

**解:** 该振动的特征常量为

$$k = \frac{f}{\Delta x} = 200 \text{ N} \cdot \text{m}, \quad \omega = \sqrt{k/m} \approx 7.07 \text{ rad/s}$$

(1) 选平衡位置为原点,  $x$  轴向下为正 (如图 2.9 所示)。当  $t=0$  时, 有

$$x_0 = A \cos \varphi = 10, \quad v_0 = -A\omega \sin \varphi = 0$$

解以上两式得  $A=10 \text{ cm}$ ,  $\varphi=0$ , 所以振动方程为

$$x = 0.1 \cos(7.07t) \text{ (SI)}$$

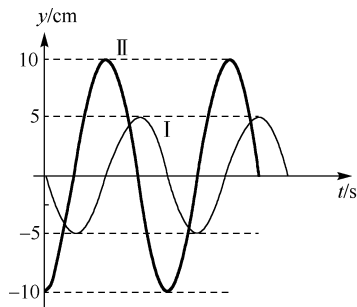


图 2.8 例 2-1 解图

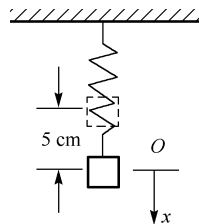


图 2.9 例 2-2 解图

(2) 物体在平衡位置上方 5cm 时, 弹簧对物体的拉力为

$$f = m(g - a)$$



而  $a = -\omega^2 x = 2.5 \text{ m/s}^2$ ，所以有

$$f = 4(9.8 - 2.5) \text{ N} = 29.2 \text{ N}$$

(3) 设  $t_1$  时刻物体在平衡位置，此时  $x = 0$ ，即

$$0 = A \cos \omega t_1 \quad \text{或} \quad \cos \omega t_1 = 0$$

所以，由此可判断物体向上运动，即  $v < 0$ ；故  $\omega t_1 = \pi/2$ ， $t_1 = \pi/2\omega = 0.222 \text{ s}$ 。

再设  $t_2$  时物体在平衡位置上方  $5 \text{ cm}$  处，此时  $x = -5$ ，代入振动方程有  $-5 = A \cos \omega t_2$ ，故  $\omega t_2 = 2\pi/3$ ，得到  $t_2 = 0.296 \text{ s}$ ，于是

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 0.074 \text{ s}$$

**例 2-3** 在竖直悬挂的轻弹簧下端系一质量为  $100 \text{ g}$  的物体，当物体处于平衡状态时，再对物体加一拉力使弹簧伸长，然后从静止状态将物体释放。已知物体在  $32 \text{ s}$  内完成  $48$  次振动，振幅为  $5 \text{ cm}$ 。则 (1) 上述的外加拉力是多大？(2) 当物体在平衡位置以下  $1 \text{ cm}$  处时，此振动系统的动能和势能各是多少？

**解法 1:**

(1) 取平衡位置为原点，向下为  $x$  正方向。设物体在平衡位置时弹簧的伸长量为  $l$ ，则有  $mg = k\Delta l$ ，加拉力  $F$  后弹簧又伸长  $x_0$ ，则得

$$F + mg - k(\Delta l + x_0) = 0, \quad \text{即} \quad F = kx_0$$

由题意可知， $t = 0$  时  $v_0 = 0$ ， $x = x_0$ ，则  $A = \sqrt{x_0^2 + (v_0/\omega)^2} = x_0$ 。

由题意得，物体振动周期  $T = \frac{32}{48} \text{ s}$ ，角频率  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ，所以  $k = m\omega^2$ ，故有

$$F = kA = (4\pi^2 m / T^2) A = 0.444 \text{ N}$$

(2) 平衡位置以下  $1 \text{ cm}$  处：

$$v^2 = (2\pi/T)^2 (A^2 - x^2)$$

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = 1.07 \times 10^{-2}$$

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}(4\pi^2 m / T^2)x^2 = 4.44 \times 10^{-4} \text{ J}$$

**解法 2:**

(1) 从静止释放，显然拉长量等于振幅  $A$  ( $5 \text{ cm}$ )， $F = kA$ ，考虑

$$k = m\omega^2 = 4m\pi^2\nu^2, \quad \nu = 1.5 \text{ Hz}$$

所以

$$F = 0.444\text{N}$$

(2) 总能量:

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}FA = 1.11 \times 10^{-2}\text{J}$$

当  $x = 1\text{cm}$  时,  $x = A/5$ , 势能  $E_p$  占总能量的  $\frac{1}{25}$ ,  $E_k$  占总能量的  $\frac{24}{25}$ , 所以

$$E_k = \frac{24}{25}E = 1.07 \times 10^{-2}\text{J}, \quad E_p = \frac{1}{25}E = 4.44 \times 10^{-4}\text{J}$$

**例 2-4** 一个质点做简谐运动, 振动振幅为  $A$ , 圆频率为  $\omega = \frac{\pi}{4}$ 。设  $t = 0$  时质点在  $\frac{A}{2}$  处向正方向运动, 经过  $\Delta t$  时间 (在一个周期内) 该质点运动到  $-\frac{A}{\sqrt{2}}$  处且其速度为正, 用旋转矢量法 (要求画出旋转矢量图) 求  $\Delta t$ 。

**解:** 如图 2.10 所示, 画出旋转矢量图, 可知质点从  $A/2$  处 (速度为正) 运动到  $A/\sqrt{2}$  处 (速度为正) 时旋转矢量转过的角度为

$$\Delta\Phi = \pi + \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{19}{12}\pi$$

已知旋转矢量的旋转角速度 (即质点振动圆频率) 为  $\pi/4$ , 故需要的时间为

$$\Delta t = \frac{\Delta\Phi}{\omega} = \frac{\frac{19}{12}\pi}{\frac{\pi}{4}} = \frac{19}{3}\text{s}$$

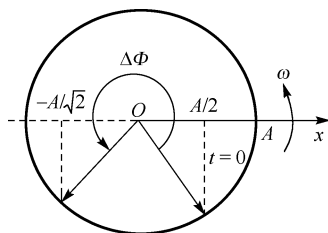


图 2.10 例 2-4 解图

**例 2-5** 已知三个同方向的简谐运动方程分别为  $x_1 = 6\cos(\pi t + \pi/2)$ ,  $x_2 = 3\sin(\pi t + \pi/2)$ ,  $x_3 = 2\cos(\pi t - \pi/2)$ , 求这三个简谐运动的合振动。

**解:** 由三角函数运算可得它们的合振动方程为

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 + x_3 \\ &= 6\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right) + 3\sin\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right) + 2\cos\left(\pi t - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= 4\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right) + 3\cos(\pi t) \\ &= 5\cos\left[\pi t + \arctan\left(\frac{4}{3}\right)\right] \end{aligned}$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{A_1}{A_2}\right) = \arctan\left(\frac{4}{3}\right)$$

## 2.5 习题

2.1 下列四种运动（忽略阻力）中哪一种为简谐运动？

- (A) 小球在地面上作完全弹性的上下跳动
- (B) 细线悬挂一小球在竖直平面上做大角度的来回摆动
- (C) 浮在水里的一均匀矩形木块，将它部分按入水中，然后松开，使木块上下浮动
- (D) 浮在水里的一均匀球形木块，将它部分按入水中，然后松开，使木块上下浮动

2.2 一质量为  $m$  的物体挂在劲度系数为  $k$  的轻弹簧下面，其振动周期为  $T$ 。若将此轻弹簧分割成三等份，将一质量为  $2m$  的物体挂在分割后的一根弹簧上，则此弹簧振子的周期应为（ ）。

- (A)  $\frac{3}{\sqrt{6}}T$
- (B)  $\frac{\sqrt{6}}{3}T$
- (C)  $\sqrt{2}T$
- (D)  $\sqrt{6}T$

2.3 一个质点做简谐运动，已知质点由平衡位置运动到  $1/2$  最大位移处所需要的最短时间为  $t_0$ ，则该质点的振动周期  $T$  应为（ ）。

- (A)  $4t_0$
- (B)  $12t_0$
- (C)  $6t_0$
- (D)  $8t_0$

2.4 一简谐运动的旋转矢量图如图 2.11 所示，设图中圆的半径为  $R$ ，则该简谐运动的振动方程为（ ）。

- (A)  $x = R \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$
- (B)  $x = R \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$
- (C)  $x = R \cos\left(\pi t - \frac{\pi}{4}\right)$
- (D)  $x = R \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right)$

2.5 某弹簧振子的振动曲线如图 2.12 所示，则由图可确定  $t=2\text{s}$  时，振子的速度为（ ）。

- (A)  $3\pi \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
- (B)  $-3\pi \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
- (C)  $3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
- (D)  $-3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

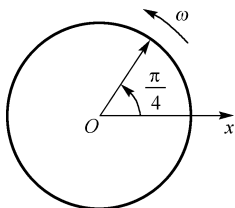


图 2.11 习题 2.4 图

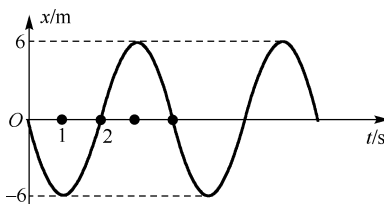


图 2.12 习题 2.5 图

2.6 两同方向同频率的简谐运动的振动方程分别为  $x_1 = 6\cos\left(5t + \frac{\pi}{2}\right)$  (SI),  $x_2 = 2\cos\left(5t - \frac{\pi}{2}\right)$  (SI), 则它们的合振动的振动方程应为 ( )。

(A)  $x = 4\cos 5t$  (SI)

(B)  $x = 8\cos(5t - \pi)$  (SI)

(C)  $x = 4\cos\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)$  (SI)

(D)  $x = 4\cos\left(5t + \frac{\pi}{2}\right)$  (SI)

2.7 若简谐运动  $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$  的周期为  $T$ , 则简谐运动  $x' = B\cos(n\omega t + \varphi_0 + \pi)$  的周期为\_\_\_\_\_。

2.8 已知简谐运动  $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$  的周期为  $T$ , 在  $t = \frac{T}{2}$  时的质点速度为\_\_\_\_\_, 加速度为\_\_\_\_\_。

2.9 一简谐运动的振动曲线如图 2.13 所示, 则由图可得其振幅为\_\_\_\_\_, 其初相为\_\_\_\_\_, 其周期为\_\_\_\_\_, 其振动方程为\_\_\_\_\_。

2.10 如图 2.14 所示, 初始时两质量均为  $m$  的无黏合的物体  $A$ 、 $B$  向左压缩劲度系数为  $k$  的弹簧, 然后放手, 则物体  $A$  第一次到达正最大位移处所用的时间为\_\_\_\_\_。若初始时弹簧被压缩  $x_0$ , 则物体  $A$  第一次到达正最大位移处时物体  $B$  的速度为\_\_\_\_\_。

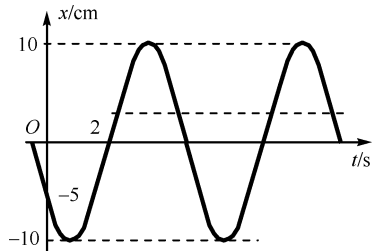


图 2.13 习题 2.9 图

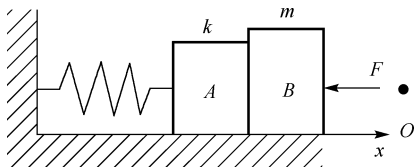


图 2.14 习题 2.10 图

2.11 已知弹簧振子的弹簧的劲度系数为  $k$ , 其振动的振幅为  $A$ , 则当振子移动到正的  $1/2$  最大位移处时的动能为\_\_\_\_\_。

2.12 如图 2.15 所示, 一质量为  $m$  的滑块与劲度系数为  $k$  的弹簧相连, 另一质量为  $M = 3m$  的滑块用一根轻绳绕过一个质量可忽略不计的定滑轮与滑块  $m$  连接。  $t = 0$  时弹簧处于原长状态, 求滑块  $M$  的运动方程。(设  $M$  处于平衡位置时为坐标原点, 以向下方向为正方向。)

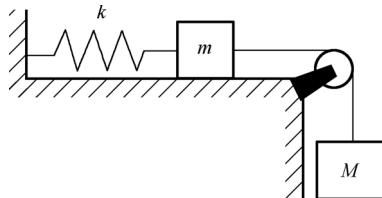


图 2.15 习题 2.12 图

2.13 如图 2.16 所示, 以向右为正方向, 用向左的力压缩一弹簧, 然后松手任其振动, 若从松手时开始计时, 则该弹簧振子的初相位为 ( )。

- (A) 0  
 (B)  $\frac{\pi}{2}$   
 (C)  $-\frac{\pi}{2}$   
 (D)  $\pi$

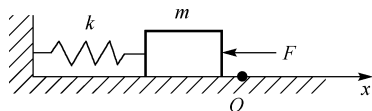


图 2.16 习题 2.13 图

2.14 两相同的轻弹簧各系一物体(质量分别为  $m_1$ 、 $m_2$ ) 做简谐运动(振幅分别为  $A_1$ 、 $A_2$ )，问下列哪一种情况两振动周期不同？

- (A)  $m_1 = m_2$ ,  $A_1 = A_2$ ，一个在光滑水平面上振动，另一个在竖直方向上振动  
 (B)  $m_1 = 2m_2$ ,  $A_1 = 2A_2$ ，两个都在光滑的平面上作水平振动  
 (C)  $m_1 = m_2$ ,  $A_1 = 2A_2$ ，两个都在光滑的平面上作水平振动  
 (D)  $m_1 = m_2$ ,  $A_1 = A_2$ ，一个在地球上做竖直振动，另一个在月球上做竖直振动

2.15 已知月球上的重力加速度是地球的  $\frac{1}{6}$ ，若一个单摆(只考虑小角度摆动)在地球上的振动周期为  $T$ ，将该单摆拿到月球上去，其振动周期应为( )。

- (A)  $6T$  (B)  $\frac{T}{6}$  (C)  $\sqrt{6}T$  (D)  $\frac{T}{\sqrt{6}}$

2.16 已知某简谐运动的振动曲线如图 2.17 所示，位移的单位为 m，时间单位为 s，则此简谐运动的振动方程为( )。

- (A)  $x = 10 \cos\left(\frac{11\pi}{24}t + \frac{2}{3}\pi\right)$  (SI)  
 (B)  $x = 10 \cos\left(\frac{7\pi}{24}t - \frac{7}{6}\pi\right)$  (SI)  
 (C)  $x = 10 \cos\left(\frac{7\pi}{24}t - \frac{2}{3}\pi\right)$  (SI)  
 (D)  $x = 10 \cos\left(\frac{11\pi}{24}t - \frac{2}{3}\pi\right)$  (SI)

2.17 一质量为  $m$  的物体与一个劲度系数为  $k$  的轻弹簧组成弹簧振子，当其振幅为  $A$  时，该弹簧振子的总能量为  $E$ 。若将其弹簧分割成两等份，将两根弹簧并联组成新的弹簧振子，则新弹簧振子的振幅为( )时，其总能量与原先弹簧振子的总能量  $E$  相等。

- (A)  $\frac{A}{2}$  (B)  $\frac{A}{4}$  (C)  $\frac{A}{\sqrt{2}}$  (D)  $A$

2.18 已知两同方向同频率的简谐运动的振动方程分别为  $x_1 = A_1 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$  (SI)，

$x_2 = A_2 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right)$  (SI), 则它们的合振幅应为 ( )。

- (A)  $|A_1 - A_2|$       (B)  $A_1 + A_2$       (C)  $\sqrt{A_1^2 + A_2^2}$       (D)  $\sqrt{|A_1^2 - A_2^2|}$

2.19 一质点做简谐运动如图 2.18 所示, 已知质点在一个周期内相继经过距离为  $S$  的两点  $A$ 、 $B$ , 历时  $T$ , 且质点在  $A$  点和  $B$  点的速度相同; 再经过  $T$  后, 质点又一次经过  $B$  点, 则该质点运动的周期为\_\_\_\_\_, 振幅为\_\_\_\_\_。

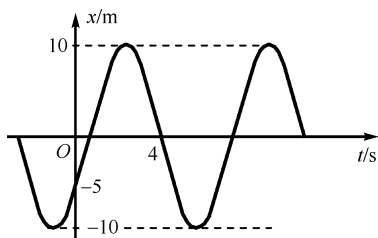


图 2.17 习题 2.16 图

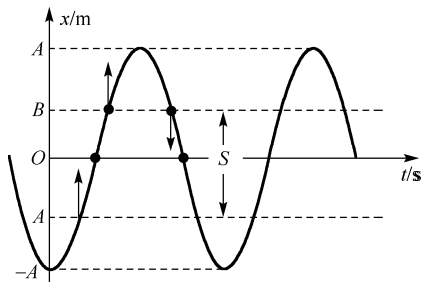


图 2.18 习题 2.19 图

2.20 已知一弹簧振子由  $m = 3\text{kg}$  的物体与劲度系数  $k = 12\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$  组成, 其振幅为  $A = 2\text{m}$ , 沿  $x$  轴运动, 并从物体处于最大位移处时开始计时, 则其角频率为\_\_\_\_\_, 初相为\_\_\_\_\_, 其振动方程为\_\_\_\_\_,  $t = \frac{\pi}{8}\text{s}$  时, 作用于该物体的力的大小为\_\_\_\_\_, 方向为\_\_\_\_\_。

2.21 已知一简谐运动的振动方程为  $x = 2\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$ , 请在图 2.19 中分别画出位移、速度和加速度的曲线。

2.22 质量为  $m$  的物体与劲度系数为  $k$  的弹簧组成弹簧振子的振动动能的变化频率为\_\_\_\_\_, 其势能的变化频率为\_\_\_\_\_。

2.23 已知一物体同时参与两个同方向同频率的简谐运动, 这两个简谐运动的振动曲线如图 2.20 所示, 其中  $A_1 > A_2$ , 则该物体振动的初相为\_\_\_\_\_。

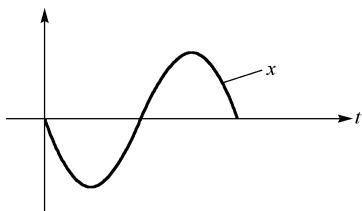


图 2.19 习题 2.21 图

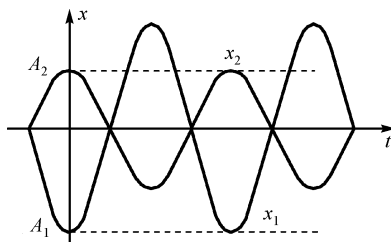


图 2.20 习题 2.23 图

2.24 一个质点做简谐运动，其运动速度与时间的曲线如图 2.21 所示，求该质点的振动方程。

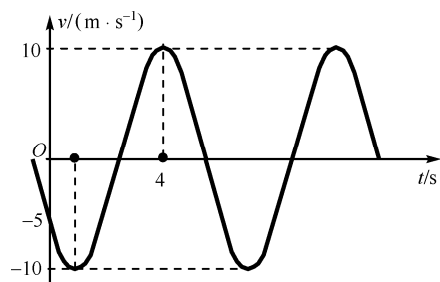


图 2.21 习题 2.24 图

## 第3章 波 动

振动的传播过程称为波动。波动通常分为两大类：一类是机械振动在媒质中的传播，称为机械波；一类是变化的电场和变化的磁场在空间的传播，称为电磁波。虽然两类波的本质不同，各有其特殊的性质和规律，但在形式上具有许多相同的特征和规律；它们都有波源，机械波的波源是机械振动，而电磁波的波源是电磁振荡；都具有一定的传播速度；都伴随着能量的传播；都能产生反射、折射、干涉和衍射等现象；都可以用相似的数学方法来描述等。本章主要介绍机械波的基本规律，其中许多对电磁波也适用。

### 3.1 学习要求

1. 理解相位传播的概念和相位差在波的叠加中的作用，重点掌握平面简谐波的波动方程，波的产生、描述、能量，以及干涉、驻波等问题。
2. 理解机械波的干涉，掌握波的相干条件，并能熟练地应用相位差或波程差的概念来分析和确定相干波叠加后振幅的极大与极小问题。
3. 理解平面简谐波波函数的物理意义以及波是能量传播的一种重要形式，了解机械波、电磁波（光波）与物质波的联系与不同。

### 3.2 内容提要

#### 1. 波动

振动的传播过程称为波动。波动通常分为两大类：一类是变化的电场和变化的磁场在空间的传播，称为电磁波；一类是机械振动在媒质中的传播，称为机械波。机械波的产生必须具备两个条件：一是要有做机械振动的物体，称为波源；二是要有传播振动的弹性媒质。

#### 2. 描述波动的几个物理量

(1) 波速  $u$ ：波动是振动状态（即位相）的传播，振动状态在单位时间内传播的距离称为波速，也称相速，用  $u$  表示。对于机械波，波速通常由媒质的性质决定。

(2) 波动的周期  $T$  和频率  $\nu$ ：波动的周期是指一个完整波形通过媒质中某一固定点所



需的时间, 用  $T$  表示。周期的倒数称为频率, 波动的频率是指单位时间内通过媒质中某固定点完整波的数目, 用  $\nu$  表示。由于波源每完成一次全振动, 就有一个完整的波形发送出去, 所以, 当波源相对于媒质静止时, 波动的周期即为波源振动的周期, 波动的频率即为波源振动的频率。因此, 波动的周期和频率由波源决定。

(3) 波长  $\lambda$ : 同一波线上相邻的位相差为  $2\pi$  的两质点之间的距离称为波长, 用  $\lambda$  表示。波长、波速与波动的周期、频率的关系为

$$\lambda = uT = \frac{u}{\nu} \quad (3-1)$$

### 3. 平面简谐波

平面简谐波的波动方程为

$$y = A \cos \left[ \omega \left( t \mp \frac{x}{u} \right) + \varphi \right] \quad (3-2)$$

波动方程的物理意义:

- ① 当  $x$  一定时, 波动方程表示在波线的  $x$  处, 质点简谐振动的振动方程。
- ② 当  $t$  一定时, 波动方程表示  $t$  时刻在波线上各质点离开各自平衡位置的分布情况, 即  $t$  时刻的波形。
- ③ 当  $x$ 、 $t$  都变化时, 波动方程表示一沿  $x$  轴方向传播的波动情况, 即代表一列行波。

### 4. 波的能量

(1) 波媒质中任一体积元  $dV$  的能量

$$\text{动能:} \quad dE_k = \frac{1}{2} \rho dV A^2 \omega^2 \sin^2 \left[ \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) + \varphi \right] \quad (3-3a)$$

$$\text{势能:} \quad dE_p = \frac{1}{2} \rho dV A^2 \omega^2 \sin^2 \left[ \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) + \varphi \right] \quad (3-3b)$$

$$\text{机械能:} \quad dE = dE_k + dE_p = \rho dV A^2 \omega^2 \sin^2 \left[ \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) + \varphi \right] \quad (3-3c)$$

式中,  $\rho$  是介质的密度。可见能量是时间  $t$  的函数, 且能量以速率  $u$  向前传播。

(2) 波的能量密度和平均能量密度

单位体积媒质所具有的能量称为波的能量密度, 用  $w$  表示, 为

$$w = \frac{dE}{dV} = \rho A^2 \omega^2 \sin^2 \left[ \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) + \varphi \right] \quad (3-4)$$

通常由于不需要具体知道不同时刻能量的瞬时值，所以就取它在一个周期内的平均值。能量密度在一个周期内的平均值称为波的平均能量密度，用  $\bar{w}$  表示，为

$$\bar{w} = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 \quad (3-5)$$

### (3) 波的平均能流

一个周期内通过与波的传播方向垂直的某个面的能量，称为能流，用  $P$  表示。能流在一个周期内的平均值称为平均能流，用  $\bar{P}$  表示，为

$$\bar{P} = \bar{w} u \Delta S \quad (3-6)$$

### (4) 波的平均能流密度（波的强度）

单位时间内垂直通过单位面积的平均能量，称为能流密度（或称波的强度），用  $I$  表示，为

$$I = \frac{\bar{P}}{\Delta S} = \bar{w} u = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 u \quad (3-7)$$

## 5. 惠更斯原理和波的衍射

(1) 惠更斯原理：媒质中波前上的各点，都可以看成是发射子波的波源，其后任一时刻这些子波的包迹就是新的波前。根据这一原理，只要知道了某一时刻的波面，就可以用几何作图的方法来确定下一时刻的波面，从而解决了波的传播问题。

(2) 波的衍射：波传播过程中，当遇到障碍物时，能绕过障碍物边缘而偏离直线传播的现象。相对于波长而言，障碍物的线度越大衍射现象越不明显。实验表明：当障碍物的线度可与波长相比拟时，衍射现象就明显，障碍物的线度越小衍射现象越明显。

## 6. 波的叠加原理

几列波相遇时保持各自的特点通过媒质中波的叠加区域；在它们重叠的区域内，每一质点的振动都是各个波单独引起的振动的合成。

波的叠加原理包含两方面内容：波传播的独立性和波的可叠加性。即几列波相遇后，各列波仍然保持它们各自原有的特性（频率、波长、振幅、振动方向等），并按原来的方向继续前进；在相遇区域内任一质点的振动位移，为各列波单独存在时在该点所引起的振动位移的矢量和。

## 7. 波的干涉

(1) 干涉现象：当两列（或几列）波在空间某一区域同时传播时，叠加后的强度在空间这一区域内重新分布，形成有的地方强度始终加强，另一些地方强度始终减弱，整个区域中强度有某一稳定分布的现象，称为波的干涉。能产生干涉现象的波称为相干波，相应的波源称为相干波源。

(2) 干涉条件: 两列(或几列)波频率相同、振动方向相同、相位相同或位相差恒定。

(3) 干涉加强、减弱的条件: 设两个相干波源

$$\begin{aligned} y_1 &= A_1 \cos\left(\omega t + \varphi_1 - 2\pi \frac{r_1}{\lambda}\right) \\ y_2 &= A_2 \cos\left(\omega t + \varphi_2 - 2\pi \frac{r_2}{\lambda}\right) \end{aligned} \quad (3-8)$$

它们的相位差为

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 - \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) \quad (3-9)$$

相遇处的合振动方程及振幅为

$$\begin{aligned} y &= y_1 + y_2 = A \cos(\omega t + \varphi) \\ A &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta\varphi} \end{aligned} \quad (3-10)$$

当

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 - 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda} = \pm 2k\pi \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

时, 则合振动的振幅有极大值, 为  $A = A_1 + A_2$ , 干涉加强(相长干涉)。

当

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 - 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda} = \pm (2k + 1)\pi \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

时, 则合振动的振幅有极小值, 为  $A = |A_1 - A_2|$ , 干涉减弱(相消干涉)。

以上结论, 对电磁波也同样适用, 后续相关章节学习中注意类比。

(4) 波的强度: 由于波的强度正比于振幅的平方, 所以两列波叠加后的强度

$$I \propto A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta\varphi$$

即

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta\varphi \quad (3-11)$$

可见, 两列波叠加后波的强度随着两列相干波在空间各点所引起的振动相位差的不同而不同。

## 8. 驻波

两列频率相同、振动方向和振幅都相同而传播方向相反的简谐波(两列相干波), 即

$$y_1 = A \cos 2\pi\left(\nu t - \frac{x}{\lambda}\right), \quad y_2 = A \cos 2\pi\left(\nu t + \frac{x}{\lambda}\right),$$

叠加后形成驻波, 其波动方程为

$$y = y_1 + y_2 = 2A \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \cos 2\pi \nu t \quad (3-12)$$

其振幅  $\left| 2A \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \right|$  随  $x$  做周期变化, 因而为分段的独立振动, 在相邻两波节之间, 各质点的相位相同, 振动步调一致, 同时到达各自的最大位移, 又同时返回平衡位置。而在波节两侧的质点, 相位相反, 即振动步调相反, 分别沿  $Oy$  轴的正负方向运动。

介质在振动过程中, 驻波的动能和势能不断地转换, 在转换过程中, 能量不断地由波腹附近转移到波节附近, 再由波节附近转移到波腹附近, 在驻波行进过程中没有能量的定向传播。驻波与行波不同, 驻波行进过程中没有振动状态(相位)和波形的定向传播, 只有恒定的波腹和波节出现。

由式(3-12)可得波节、波腹位置。

波节位置: 在  $\cos 2\pi \frac{x}{\lambda} = 0$  位置处, 即  $x = \pm(2k+1)\frac{\lambda}{4}$  ( $k=0,1,2,\dots$ ) 处为波节

波腹位置: 在  $\left| \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \right| = 1$  位置处, 即  $x = \pm k\frac{\lambda}{2}$  ( $k=0,1,2,\dots$ ) 处为波腹

说明: 波由波疏媒质行进到波密媒质, 在分界面反射时会形成波节, 相当于反射波在反射点损失了半个波长的波程, 即在反射点反射波的相位有  $\pi$  的突变, 这种现象称为半波损失。

## 9. 多普勒效应

观察者和波源之间有相对运动时, 观察者测到的频率  $\nu_r$  和波源的频率  $\nu$  不相同的现象, 称为多普勒效应, 两频率其关系为

$$\nu_r = \frac{u + v_0}{u - v_s} \nu \quad (3-13)$$

式中,  $u$ 、 $v_0$ 、 $v_s$  分别是波速、观察者相对介质运动的速度和波源相对介质运动的速度。当观察者向着波源运动时,  $v_0 > 0$ ; 当观察者背离波源运动时,  $v_0 < 0$ ; 波源向着观察者运动时,  $v_s < 0$ ; 波源背离观察者运动时,  $v_s > 0$ 。

从式(3-13)可见, 波源与观察者互相接近时, 接收到的频率就高于原来波源的频率; 两者互相远离时, 接收到的频率就低于原来波源的频率。交通警察用于测量汽车速度的探测器就是利用多普勒效应原理。

## \*10. 声波

### (1) 声波的概念

声波是机械波的一种。在弹性介质(固体、液体、气体)中, 通常将频率在  $20 \sim 20\,000\text{Hz}$  的机械振动称为声振动, 由声振动激起的波动称为声波。在空气与水中传播的声波是纵波, 在固体中传播的声波则可以是纵波, 也可以是横波。

## (2) 声波的分类

① 可闻声波：人耳能听到的声波的频率大约在  $20 \sim 20\,000\text{Hz}$  之间，这一频率范围的声波能被人耳听到，称为可闻声波。

② 次声波：频率低于  $20\text{Hz}$  的声波称为次声波，次声波不能被人耳听到。其特性是频率低 ( $<20\text{Hz}$ )，波长长，大气吸收少，可以远距离传输，容易发生衍射，定向发射能力弱。

③ 超声波：频率高于  $20\,000\text{Hz}$  的声波称为超声波，超声波不能被人耳听到。由于频率高、波长短，故超声波与一般声波相比还有如下特征：

a) 能流密度大。由于能流密度与频率的平方成正比，故超声波的能流密度比一般声波大得多。

b) 方向性好。由于超声波的波长短，衍射效应不显著，故可以近似地认为超声波沿直线传播，即传播的方向性好，容易得到定向而集中的超声波束，能够产生反射、折射，也可以被聚焦。超声波的这一特性，称为束射特性。

c) 穿透力强。超声波的穿透本领大，特别是在液体和固体中传播时，衰减很小，所以超声波主要用在固体和液体中。与电磁波相反，在空气中衰减较快。

## (3) 声波的速度

机械波在不同介质中传播的速度是不同的，例如：

$$\text{固体内纵波的波速} \quad u = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (3-14)$$

式中， $E$  为固体的弹性模量（杨氏模量）， $\rho$  为固体的密度。

$$\text{流体中纵波的速度} \quad u = \sqrt{\frac{k}{\rho}} \quad (3-15)$$

由理想气体状态方程  $p = \frac{M}{V} = \frac{M_{\text{mol}} p}{RT}$  得到声波在气体中的传播速度为

$$u = \sqrt{\frac{k}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\gamma RT / M_{\text{mol}}} \quad (3-16)$$

式中， $\gamma = C_{p,m} / C_{v,m}$  是气体的定压摩尔热容与定容摩尔热容之比， $\rho$ 、 $p$  为气体的密度和压强。空气中的声速一般可近似用式 (3-16) 计算，例如，在  $1\text{atm}$  和  $0^\circ\text{C}$  时，空气中声速为  $u = \sqrt{1.4 \times 1.013 \times 10^5 / 1.293} = 331\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

声波的传播速度几乎与频率无关，但是由于速度与介质的密度有关，所以声波的传播速度对于温度和压强的变化很敏感。

在同一温度下，声波在液体与固体中的速度大于在空气中的速度。

#### (4) 声强

声波的能流密度称为声强。由平均能流密度的定义 [见式 (3-7)] 有

$$I = \frac{1}{2} \rho u A^2 \omega^2 = \frac{1}{2} Z A^2 \omega^2 \quad (3-17)$$

其中,  $Z = \rho u$  是表征介质特性的一个常量, 称为介质的特性阻抗。在 SI 制中, 单位为  $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$ 。可见, 对声强产生直接影响的是角频率  $\omega$  和振幅  $A$ 。例如, 对于超声波, 由于  $\omega$  大, 故声强大; 对于炮声, 由于  $A$  大, 故声强也大。声强太大 (上限) 或太小 (下限) 都不能引起听觉。常将听觉上限称为痛觉阈, 下限称为听觉阈。

#### (5) 声强级

引起人们听觉的声强变化范围很大, 约为  $10^{-12} \sim 1 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ , 数量级相差很大。由此, 为了比较介质中各点声波的强度, 通常不使用声强, 而是使用声强级。规定声强级的基准值为  $I_0 = 10^{-12} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ , 即在 1000Hz 时的声波能引起听觉的最弱声强 (这个值为  $10^{-12} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ )。通常把声强  $I$  与基准声强之比的对数称为声强级, 表达式为

$$I_L = \lg \frac{I}{I_0} \quad (3-18)$$

单位为贝尔 (bel), 实际上, 贝尔这一单位太大, 常采用分贝 (dB)。此时声强级公式为

$$I_L = 10 \lg \frac{I}{I_0} \quad (3-19)$$

### 3.3 重点难点分析

#### 1. 本章重点

学习本章应重点掌握平面简谐波的波动方程, 波的产生, 波的描述, 波的能量, 以及干涉、驻波等问题; 学习波动方程时, 要理解建立波动方程的思路, 理解波动方程的物理意义, 明确机械波是机械振动在介质中的传播, 掌握振动状态传播的规律; 学习机械波的干涉问题时, 要掌握波的相干条件, 并能熟练地应用相位差或波程差的概念来分析和确定相干波叠加后振幅的极大与极小问题。

#### 2. 本章难点

波动方程的建立是本章的难点之一, 对此要从三个不同角度, 即  $x = \text{常量}$ ,  $t = \text{常量}$ , 以及  $x$  和  $t$  都变化这三个方面去仔细分析理解机械波的产生和传播机理。另一个难点是对波的传播的认识, 介质中各质点的振动是波源振动的重复, 各质点的振动不同的仅仅是相位不同, 沿着波的传播方向, 各质点的振动相位逐点滞后。因而, 可以说波的传播是质点机械振动在弹性介质中的传播。

### 3.4 精选例题分析

**例 3-1** 已知平面简谐波的波动方程为  $y = 20 \cos \pi(2.5t - 0.01x)$  (m), 求其波长、周期和波速。

分析: 已知波动方程求描述波动的物理量, 常用的方法是先将波动方程与标准方程进行比较, 然后“对号入座”便可求出待求的物理量。

**解:** 将题设的方程与波动方程的标准式  $y = A \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$  进行比较, 得

$$\frac{2\pi}{\lambda} = 0.01\pi, \quad \frac{2\pi}{T} = 2.5\pi$$

解之得波长、周期分别为

$$\lambda = \frac{2}{0.01} = 200 \text{ m}, \quad T = \frac{2}{2.5} = 0.8 \text{ s}$$

故波速为

$$u = \frac{\lambda}{T} = \frac{200}{0.8} = 250 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

**例 3-2** 某平面波在坐标原点  $O$  处的振动方程为  $y_0 = A \cos \omega t$ , 设波速为  $u$ , 入射波到达距离原点  $L$  处反射时没有半波损失, 求反射面处的入射波和反射波的表达式。

分析: 机械波是机械振动在介质中的传播, 传播的是振动状态, 介质中各质点的振动是波源振动的重复, 不同的仅仅是相位, 沿着波的传播方向, 各质点的振动相位逐点滞后。因而可根据题设条件写出其他任意质点的振动方程, 即波函数  $y_\lambda$ 。

**解:** 由题设条件知, 入射波的波动方程为  $y_\lambda = A \cos \omega \left( t - \frac{x}{u} \right)$ , 波自  $O$  点传到反射处的时间  $\Delta t = \frac{L}{u}$ 。故入射波在反射面处的表达式为

$$y_L = A \cos \omega \left( t - \frac{L}{u} \right)$$

入射波到达反射面后便沿  $X$  轴的负向传播, 到达任意点  $x$  处所需的时间为

$$\Delta t' = \frac{L - x}{u}$$

于是, 反射波的波动方程为

$$y_{\text{反}} = A \cos \left[ \omega \left( t - \frac{L - x}{u} \right) - \frac{\omega L}{u} \right] = A \cos \left[ \omega \left( t + \frac{x}{u} \right) - \frac{2\omega L}{u} \right]$$

**例3-3** 一正弦波在空气中沿直径为0.14m的圆柱形管行进, 波的强度为  $9 \times 10^{-3} \text{ J} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$ , 角频率为 300Hz, 波速为  $300 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 。求:

- (1) 波的平均能量密度和最大能量密度;
- (2) 两相邻的同相面间的波中平均含有的能量。

分析: 单位体积媒质所具有的能量为波的能量密度  $w = dE/dV$ , 能量密度在一个周期内的平均值称为波的平均能量密度, 但在本题中可直接应用平均能量密度与波强、波速的关系  $\bar{w} = \frac{I}{u}$  求解。因为平均能量密度为能量密度在一个周期内的平均值, 由式(3-4)有

$$\bar{w} = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2, \text{ 所以最大能量密度 } w = \rho A^2 \omega^2 = 2\bar{w}.$$

**解:** (1) 由题意知, 垂直于波传播方向的面积

$$S = \pi \left( \frac{d}{2} \right)^2 = 3.14 \times \left( \frac{0.14}{2} \right)^2 = 1.54 \times 10^{-2} \text{ m}^2$$

由平均能量密度与波强、波速的关系得

$$\bar{w} = \frac{I}{u} = \frac{9 \times 10^{-3}}{300} = 3 \times 10^{-5} \text{ J} \cdot \text{m}^{-3}$$

最大能量密度

$$w = \rho A^2 \omega^2 = 2\bar{w} = 6 \times 10^{-5} \text{ J} \cdot \text{m}^{-3}$$

(2) 两相邻同相位面间的波带中包含的能量就是一个波长距离空间中包含的能量, 而

$$w = \rho A^2 \omega^2 \sin^2 \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) = w_m \sin^2 \omega \left( t - \frac{x}{u} \right)$$

故

$$\begin{aligned} \bar{w}_\lambda &= \int_0^\lambda w S dx = \int_0^\lambda S w_m \sin^2 \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} w_m S \lambda = \frac{1}{2} w_m S \frac{u}{v} = \frac{6 \times 10^{-5}}{2} \times 0.0154 \times \frac{300}{300} = 4.62 \times 10^{-7} \text{ J} \end{aligned}$$

**例3-4** 两相干波源  $B$ 、 $C$  相距 30m, 振幅均为 0.01m, 初相差为  $\pi$ 。两波源相向发出平面简谐波, 频率均为 100Hz, 波速均为  $430 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 。求:

- (1) 两波源的振动方程;
- (2) 两谐波的波动方程;
- (3) 在线段  $BC$  上, 因干涉而静止的各点的位置。

**解:** (1) 建立坐标系。设波源  $B$  位于坐标系的原点  $O$ , 初相  $\varphi_B = 0$ , 则波源  $C$  的初相  $\varphi_C = \pi$ 。两波源的振动方程分别为



$$y_B = 0.01 \cos 200\pi t \text{ (m)}, \quad y_C = 0.01 \cos(200\pi t + \pi) \text{ (m)}$$

(2) 设  $x$  为  $B$ 、 $C$  间的任一点, 则两波的波动方程分别为

$$y_B = 0.01 \cos 200\pi \left( t - \frac{x}{430} \right) \text{ (m)}$$

$$y_C = 0.01 \cos \left[ 200\pi \left( t + \frac{x-30}{430} \right) + \pi \right] = 0.01 \cos \left[ 200\pi \left( t + \frac{30-x}{430} \right) + \pi \right] \text{ (m)}$$

(3) 因干涉而静止的点是合振幅有极小值的点, 故

$$\Delta\varphi = \varphi_C - \varphi_B = \pi + \frac{x-30+x}{430} \times 200\pi = (2k+1)\pi$$

解之得

$$x = 15 + 2.15k \text{ (m)} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 6)$$

**例 3-5** 如图 3.1 所示,  $S_1$ 、 $S_2$  为两个相干波源, 间距为  $\lambda/4$ ,  $S_1$  的相位比  $S_2$  的超前  $\pi/2$ 。如果两波在  $S_1$  和  $S_2$  的连线方向上各点强度相同, 均为  $I_0$ 。求  $S_1$ 、 $S_2$  的连线上  $S_1$  及  $S_2$  外侧各点合成波的强度。

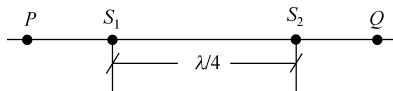


图 3.1 例 3-5 题图

**解:** 设  $P$  为波源  $S_1$  外侧任意一点, 与  $S_1$  距离为  $r_1$ ,  $P$  与波源  $S_2$  距离为  $r_2$ , 则  $S_1$ 、 $S_2$  的振动传到  $P$  点的相位差

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \varphi_{20} - \varphi_{10} + \frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2) = -\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{\lambda} \left( -\frac{\lambda}{4} \right) = -\pi$$

故合振幅  $A = |A_1 - A_2| = 0$ ,  $I_P = 0$ 。

设  $Q$  为  $S_2$  外侧的任意一点, 同理可求得  $S_1$ 、 $S_2$  的振动传到  $Q$  的相位差

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{4} = 0$$

故合振幅  $A = A_1 + A_2 = 2A_1$ , 合成波的强度与入射波的强度之比为

$$\frac{I_Q}{I_0} = \frac{4A_1^2}{A_1^2} = 4$$

即  $I_Q = 4I_0$ 。

**例 3-6** 一简谐波沿  $Ox$  轴正向传播, 波长  $\lambda = 4 \text{ m}$ , 周期  $T = 4 \text{ s}$ , 已知  $x = 0$  处质点的

振动曲线如图 3.2 所示。

- (1) 写出  $x=0$  处质点的简谐运动方程；
- (2) 写出波的表达式；
- (3) 画出  $t=1\text{ s}$  时刻的波形曲线。

解：(1) 根据质点简谐运动方程

$$y = A \cos(\omega t + \varphi)$$

其初相可由旋转矢量法求得，如图 3.3(a)所示，则有初相

$$\varphi = \frac{2}{3}\pi$$

所以， $x=0$  处质点振动方程为

$$y_0 = \sqrt{2} \times 10^{-2} \cos\left(\frac{1}{2}\pi t + \frac{2\pi}{3}\right) \quad (\text{SI})$$

- (2) 波动方程为

$$y = \sqrt{2} \times 10^{-2} \cos\left[2\pi\left(\frac{t}{4} - \frac{x}{4}\right) + \frac{2\pi}{3}\right] \quad (\text{SI})$$

- (3)  $t=1\text{ s}$  时刻的波形曲线如图 3.3(b)所示。

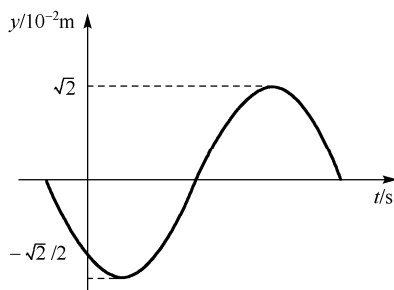


图 3.2 例 3-6 题图

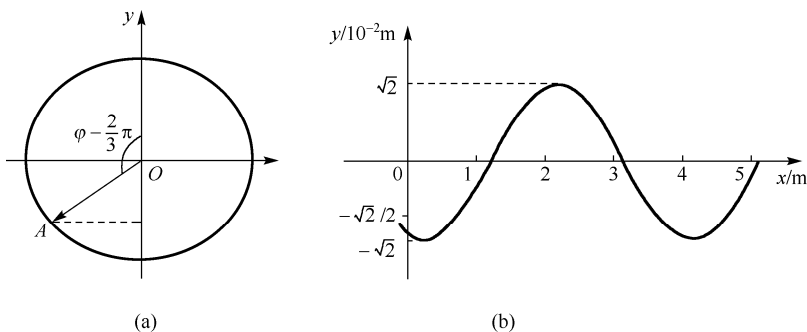


图 3.3 例 3-6 解图

**例 3-7** 两列波在一根很长的细绳上传播，其波动方程为  $y_1 = 0.06 \cos \pi(x - 4t) (\text{m})$ ；  
 $y_2 = 0.06 \cos \pi(x + 4t) (\text{m})$

- (1) 证明细绳上的振动为驻波式振动；
- (2) 求波节和波腹的位置；
- (3) 波腹处的振幅有多大？在  $x=1.2\text{ m}$  处的振幅为多少？

解：(1) 因合成波的方程

$$\begin{aligned}
 y &= y_1 + y_2 = 0.06 \cos \pi(x - 4t) + 0.06 \cos \pi(x + 4t) \\
 &= 2 \times 0.06 \cos \frac{\pi(x - 4t) + \pi(x + 4t)}{2} \times \cos \frac{\pi(x - 4t) - \pi(x + 4t)}{2} \\
 &= 0.12 \cos \pi x \cos 4\pi t \text{ (m)}
 \end{aligned}$$

故细绳上的振动为驻波式振动。

(2) 由  $\cos \pi x = 0$  得  $\pi x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ , 故波节位置坐标

$$x = \frac{1}{2}(2k+1) \text{ (m)} \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

由  $|\cos \pi x| = 1$  得  $\pi x = k\pi$ , 故波腹位置坐标

$$x = k \text{ (m)} \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

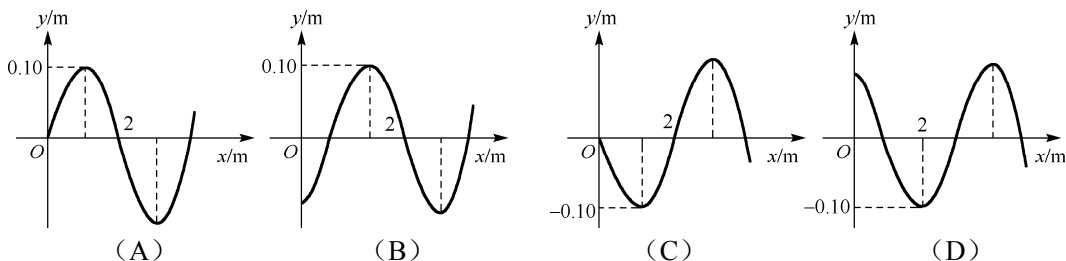
(3) 由合成波方程知, 波腹处的振幅  $A = 0.12 \text{ m}$ ; 在  $x = 1.2 \text{ m}$  处的振幅

$$A_{1.2} = |0.12 \cos 1.2\pi| = 0.097 \text{ m}$$

### 3.5 习题

3.1 一平面简谐波沿  $Ox$  正方向传播, 波动表达式为  $y = 0.10 \cos \left[ 2\pi \left( \frac{t}{2} - \frac{x}{4} \right) + \frac{t}{2} \right]$  (SI),

该波在  $t = 0.5 \text{ s}$  时刻的波形图是 ( )。



3.2 横波以波速  $u$  沿  $x$  轴负方向传播。  $t$  时刻波形曲线如图 3.4 所示。则该时刻 ( )。

- (A) A 点振动速度大于零
- (B) B 点静止不动
- (C) C 点向下运动
- (D) D 点振动速度小于零

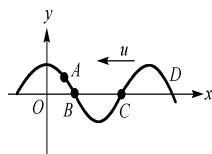


图 3.4 习题 3.2 图

3.3 若一平面简谐波的表达式为  $y = A \cos(Bt - Cx)$ , 式中  $A$ 、 $B$ 、 $C$  为正值常量, 则 ( )。

(A) 波速为  $C$  (B) 周期为  $1/B$  (C) 波长为  $2\pi/C$  (D) 角频率为  $2\pi/B$

3.4 频率为 100 Hz, 传播速度为 300 m/s 的平面简谐波, 波线上距离小于波长的两点振动的相位差为  $\pi/3$ , 则此两点相距 ( )。

(A) 2.86m (B) 2.19m (C) 0.5m (D) 0.25m

3.5 如图 3.5 所示, 一平面简谐波沿  $x$  轴正向传播, 已知  $P$  点的振动方程为  $y = A\cos(\omega t + \varphi_0)$ , 则波的表达式为 ( )。

(A)  $y = A\cos\{\omega[t - (x-l)/u] + \varphi_0\}$

(B)  $y = A\cos\{\omega[t - (x/u)] + \varphi_0\}$

(C)  $y = A\cos\omega(t - x/u)$

(D)  $y = A\cos\{\omega[t + (x-l)/u] + \varphi_0\}$

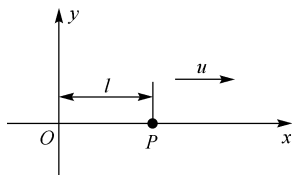


图 3.5 习题 3.5 图

3.6 如图 3.6 所示,  $S_1$  和  $S_2$  为两相干波源, 它们的振动方向均垂直于图面, 发出波长为  $\lambda$  的简谐波,  $P$  点是两列波相遇区域中的一点, 已知  $\overline{S_1P} = 2\lambda$ ,  $\overline{S_2P} = 2.2\lambda$ , 两列波在  $P$  点发生相消干涉。若  $S_1$  的振动方程为  $y_1 = A\cos\left(2\pi + \frac{1}{2}\pi\right)$ , 则  $S_2$  的振动方程为 ( )。

(A)  $y_2 = A\cos\left(2\pi t - \frac{1}{2}\pi\right)$

(B)  $y_2 = A\cos(2\pi t - \pi)$

(C)  $y_2 = A\cos\left(2\pi t + \frac{1}{2}\pi\right)$

(D)  $y_2 = A\cos(2\pi t - 0.1\pi)$

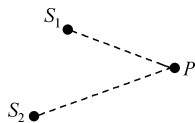


图 3.6 习题 3.6 图

## 二、填空题

3.7 一平面简谐波(机械波)沿  $x$  轴正方向传播, 波动表达式为  $y = 0.2\cos\left(\pi t - \frac{1}{2}\pi x\right)$  (SI), 则在  $x = -3\text{m}$  处媒质质点的振动加速度  $a$  的表达式为\_\_\_\_\_。

3.8 一列平面简谐波沿  $x$  轴正向无衰减地传播, 波的振幅为  $2 \times 10^{-3}\text{m}$ , 周期为 0.01s, 波速为  $400\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ 。当  $t = 0$  时  $x$  轴原点处的质元正通过平衡位置向  $y$  轴正方向运动, 则该简谐波的表达式为\_\_\_\_\_。

3.9 一声纳装置向海水中发出超声波, 其波的表达式为  $y = 1.2 \times 10^{-3} \cos(3.14 \times 10^5 t - 220x)$  (SI) 则此波的频率  $\nu =$  \_\_\_\_\_, 波长  $\lambda =$  \_\_\_\_\_, 海水中声速  $u =$  \_\_\_\_\_。

3.10  $S_1$ 、 $S_2$  为振动频率、振动方向均相同的两个点波源, 振动方向垂直纸面, 两者相距  $\frac{3}{2}\lambda$  ( $\lambda$  为波长), 如图 3.7 所示。已知  $S_1$  的初相为  $\frac{1}{2}\pi$ 。

(1) 若使射线  $S_2C$  上各点由两列波引起的振动均为干涉相消, 则  $S_2$  的初相应为\_\_\_\_\_。

(2) 若使  $S_1$ 、 $S_2$  连线的中垂线  $MN$  上各点由两列波引起的振动均干涉相消, 则  $S_2$  的初位相应为\_\_\_\_\_。

3.11 如图 3.8 所示, 一平面简谐波沿  $Ox$  轴负方向传播, 波长为  $\lambda$ , 若  $P$  处质点的振动方程是  $y_p = A \cos(2\pi\nu t + \pi/2)$ , 则该波的表达式是\_\_\_\_\_;  $P$  处质点\_\_\_\_\_时刻的振动状态与  $O$  处质点  $t_1$  时刻的振动状态相同。

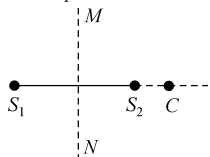


图 3.7 习题 3.10 图

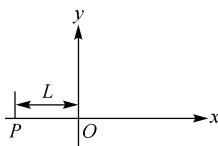


图 3.8 习题 3.11 图

### 三、计算题

3.12 如图 3.9 所示,  $A$  和  $B$  是两个同相位的波源, 相距  $d = 0.10 \text{ m}$ , 同时以  $30 \text{ Hz}$  的频率发出波动, 波速为  $0.50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $P$  点位于与  $AB$  成  $30^\circ$ , 与  $A$  距离为  $4 \text{ m}$  处, 求两波通过点  $P$  的相位差。

3.13 一横波沿绳子传播, 其波的表达式为  $y = 0.05 \cos(100\pi t - 2\pi x)$  (SI), 求:

- (1) 此波的振幅、波速、频率和波长;
- (2) 绳子上各质点的最大振动速度和最大振动加速度;
- (3)  $x_1 = 0.2 \text{ m}$  处和  $x_2 = 0.7 \text{ m}$  处二质点振动的相位差。

3.14 一平面简谐波沿  $Ox$  轴正方向传播, 波的表达式为  $y = A \cos 2\pi(\nu t - x/\lambda)$ , 而另一平面简谐波沿  $Ox$  轴负方向传播, 波的表达式为  $y = A \cos 2\pi(\nu t + x/\lambda)$ , 求:

- (1)  $x = \frac{\lambda}{4}$  处介质质点的合振动方程;
- (2)  $x = \frac{\lambda}{4}$  处介质质点的速度表达式。

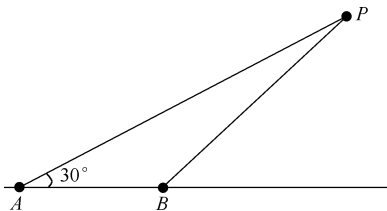


图 3.9 习题 3.12 图

## 第4章 静 电 场

静止电荷和运动电荷对周围空间所激发的电磁现象一般是不同的，相对观察者静止的电荷只激发电场，称为静电场，而相对观察者运动的电荷不仅激发电场，还激发磁场，电场和磁场是相互关联的。电荷在电场和磁场中的相互作用是自然界已知的相互作用之一，也是人们认识得较深的一种相互作用。对物质结构的认识过程都要涉及电磁相互作用，因此，理解和掌握电磁相互作用的规律具有极其重要的意义。本章主要研究真空中静电场的基本性质和规律，包括真空中静电场的基本特性，电场对电荷的力的作用，电荷在电场中移动时电场力对电荷做功，静电场的两条基本定理——高斯定理和环路定理，描述电场的两个重要物理量——电场强度和电势，电场、电势的叠加原理，以及电场强度与电势梯度的关系。

### 4.1 学习要求

1. 理解电场强度、电势、电势差等基本概念。
2. 掌握库仑定律、场强叠加原理、高斯定理、环路定理的基本规律。
3. 掌握简单几何形状带电体附近的场强、电势的计算方法。
4. 理解电场强度与电势梯度的关系。

### 4.2 内容提要

#### 1. 基本概念

##### (1) 电荷及电荷的相互作用

电荷：电荷是物质间发生电相互作用的一种属性。电荷有两种，正电荷和负电荷，同种电荷相斥，异种电荷相吸。

电荷的量子化：物体所带电荷的多少称为电荷量，也称为电量。在自然界中，任何电荷的电量总是某一基本单元的整数倍，电荷的基本单元就是一个电子或一个质子所带电量的绝对值（也称为元电荷），以  $e$  表示。在国际单位制（SI）中，电荷量的单位是库仑（C），2002 年元电荷的推荐值为

$$e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$$

电荷量只能取分立值或不连续量值的特性称为电荷的量子化。

电荷守恒：实验指出，在一个孤立系统中，系统所具有的正负电荷的电量的代数和总保持不变，这一性质称为电荷守恒定律。

点电荷：只考虑带电体的电荷量和位置，不考虑带电体的大小和形状，点电荷是一种理想模型。

电场力：电场对处于其中的其他电荷的作用力，电荷间的相互作用力本质上是各自的电场作用于对方的电场力。

静电场：相对于观察者静止的电荷在周围空间激发的电场。

## (2) 库仑定律的矢量公式

库仑在1785年，通过实验总结出了库仑定律：在真空中两个静止点电荷间的相互作用（电）力，其方向沿两个点电荷的连线，同种电荷相互排斥，异种电荷相互吸引；其大小与两电荷的电量 $q_1$ 和 $q_2$ 的乘积成正比，与它们之间距离的平方成反比，即

$$\mathbf{F} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \mathbf{e}_r \quad (4-1)$$

式中， $\mathbf{F}$ 表示 $q_2$ 对 $q_1$ 的作用力， $r$ 表示 $q_1$ 、 $q_2$ 间的距离， $\mathbf{e}_r$ 表示从 $q_2$ 指向 $q_1$ 的单位矢量（见图4.1）。 $k$ 是比例系数，并由实验测得

$$k = 8.9875 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2 \quad (\text{SI})$$

通常还引入另一常量 $\varepsilon_0$ 来代替 $k$ ，使 $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ ，从而

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = 8.8541 \times 10^{-12} \text{ C}^2 / \text{N} \cdot \text{m}^2 \quad (4-2)$$

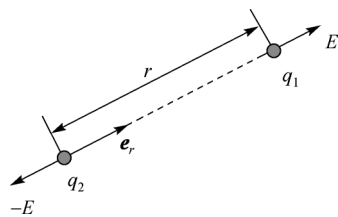


图 4.1 库仑定律示意图

在式(4-1)中，当 $q_1$ 与 $q_2$ 同号时， $\mathbf{F}$ 与 $\mathbf{e}_r$ 同向，表明电荷 $q_1$ 受 $q_2$ 的斥力；当 $q_1$ 与 $q_2$ 异号时， $\mathbf{F}$ 与 $\mathbf{e}_r$ 反向，表明电荷 $q_1$ 受 $q_2$ 的吸力。

式(4-2)称为真空的介电常数（或真空电容率），因此，库仑定律又可表示为

$$\mathbf{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r \quad (4-3)$$

在库仑定律表示式中引入“ $4\pi$ ”因子的做法，称为单位制的有理化。这样做的结果虽然使库仑定律的形式变得复杂，但却使以后经常用到的电磁学规律的表示式因不出现“ $4\pi$ ”因子而变得简单。

库仑定律属于实验定律，目前已证明距离 $r$ 的二次幂在相当误差范围内都证明库仑定律是正确有效的。

## (3) 电力叠加原理

实验表明，点电荷之间的相互作用力满足叠加性。当空间存在多个点电荷时，其中某一点电荷受到的静电力等于其余各点电荷单独作用的静电力的矢量和，这一结论称为电力

叠加原理。其数学形式为

$$\mathbf{F} = \sum_{j \neq i}^n \mathbf{F}_j \quad \text{或} \quad \mathbf{F} = \sum_{j \neq i}^n \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_j^2} \mathbf{e}_j \quad (4-4)$$

#### (4) 电场强度

实验证明, 置于电场中的电荷  $q_0$  (试验电荷), 所受电场力  $\mathbf{F}$  的大小与电量  $q_0$  成正比, 而比值  $\mathbf{F}/q_0$  则与试验电荷无关, 是一个仅由源电荷产生的电场决定的物理量, 称为电场强度 (也称场强)。该物理量用于描述电场的性质, 通常用  $\mathbf{E}$  表示, 定义为

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_0} \quad (4-5)$$

上式表明, 电场中某场点上的电场强度等于置于该点的单位正电荷所受的电场力。在静电场中各场点的电场强度可能不同, 因此  $\mathbf{E}$  一般是场点坐标的矢量函数, 即  $\mathbf{E}(x, y, z)$  或  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ 。在国际单位制中, 电场强度的单位为牛顿/库仑 (N/C) 或伏特/米 (V/m)。

点电荷系产生的电场中某点的电场强度等于各个点电荷单独存在时在该点产生的电场强度的矢量和, 这一结论称为场强叠加原理, 其数学形式为

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_0} = \sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{F}_i}{q_0} = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i \quad (4-6)$$

从场的观点看, 叠加原理属于电场的基本性质。

在电场强度的计算中, 可应用式 (4-5) 和式 (4-6) 分别计算点电荷和点电荷系的电场强度, 对于连续分部的带电体的电场强度将在电场强度的计算中详细讲解。

#### (5) 电势与电势差

电势: 电场中  $a$  点的电势定义为

$$V_a = \int_a^{\text{零势点}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (4-7)$$

$a$  点的电势等于将单位正电荷自  $a$  点沿任意路径移至电势零点时, 电场力所做的功, 或等于电场强度从  $a$  点到电势零点沿任意路径的线积分。

电势差: 电场中任意两场点  $a$ 、 $b$  间的电势差为

$$V_a - V_b = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (4-8)$$

也称为两点间的电压, 其意义是:  $a$ 、 $b$  间的电势差等于把单位正电荷由点  $a$  沿任意路径移至点  $b$  时, 电场力所做的功。

点电荷系的电势: 在点电荷系的静电场中, 某点的电势等于每一个电荷单独在该点时所激发的电势的代数和。该性质称为电势的叠加原理。数学形式为

$$V_p = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i} \quad (4-9)$$



注意：式(4-6)、式(4-9)分别为电场强度和电势叠加原理的数学形式，但前者为矢量叠加，后者为标量叠加。

## 2. 静电场的高斯定理与环路定理

### (1) 电场线与电通量

**电场线：**为了形象地描绘电场在空间的分布，可以画出电场线图。电场线是按下述规定在电场中画出的一系列假想的曲线，曲线上每一点的切线方向表示该点场强的方向，曲线的疏密表示场强的大小。定量地说，为了表示电场中某点场强的大小，设想通过该点画一个垂直于电场方向的面元  $dS_{\perp}$ ，如图 4.2 所示，通过此面元画  $d\Phi_e$  条电场线，使得

$$E = \frac{d\Phi_e}{dS_{\perp}} \quad (4-10)$$

即电场中某点电场强度的大小等于通过该点附近垂直于电场方向的单位面积的电场线条数。

静电场的电场线具有以下特征：

- ① 电场线起自正电荷，止于负电荷，或延伸到无穷远处；
- ② 电场线不形成闭合曲线；
- ③ 没有电荷处，两条电场线不会相交，也不会中断。

**电通量：**通过电场中任一给定曲面的电场线总数，称为通过该曲面的电通量（电场强度通量），用  $\Phi_e$  表示。如图 4.3 所示，在电场中任取一曲面  $S$ ，为计算通过该曲面的电通量，可将曲面  $S$  分割成许多小面元  $dS$ ，并用  $\mathbf{e}_n$  代表垂直于  $dS$  面元的正法向单位矢量。根据式(4-10)，通过  $dS$  的电场线的条数即电通量应为

$$d\Phi_e = E dS_{\perp} = E dS \cos \theta = \mathbf{E} \cdot \mathbf{e}_n dS \quad (4-11)$$

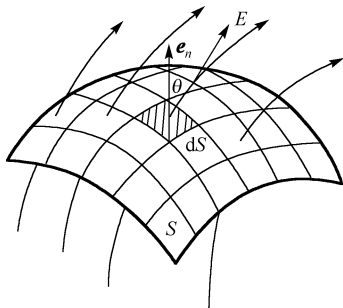


图 4.3 通过任意曲面的电通量

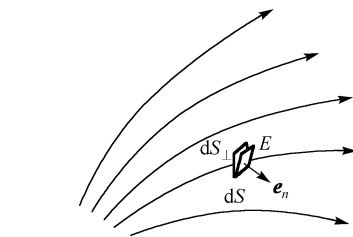


图 4.2 电场线数密度与场强大小的关系

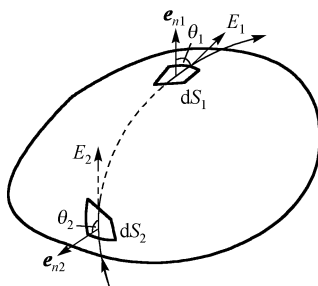


图 4.4 通过封闭曲面的电通量

定义矢量面元  $d\mathbf{S} = dS\mathbf{e}_n$ ，其大小就等于  $dS$  面的面积，方向为  $dS$  面的正法线方向。根据矢量标积的定义，通过面元  $dS$  的电通量式 (4-11) 又可写为

$$d\Phi_e = \mathbf{E} \cdot \mathbf{e}_n dS = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad (4-12)$$

注意，由式 (4-12) 决定的电通量  $d\Phi_e$  有正、负之分，当  $0 \leq \theta < \pi/2$  时， $d\Phi_e$  为正；当  $\pi/2 < \theta \leq \pi$  时， $d\Phi_e$  为负。

通过整个曲面  $S$  的电通量应该是通过所有面积元的电通量之和，对整个曲面  $S$  求积分，即得

$$\Phi_e = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad (4-13)$$

通过一个封闭曲面  $S$  的电通量，见图 4.4，可表示为

$$\Phi_e = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad (4-14)$$

积分符号 “ $\oint$ ” 表示对整个封闭曲面进行面积分。

## (2) 静电场的高斯定理

在真空中，通过任意闭合曲面（高斯面）的电场强度通量等于该高斯面所包围的电荷量的代数和除以  $\varepsilon_0$ ，定理的数学形式为

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum q_i \quad (4-15)$$

式中， $\sum q_i$  表示在封闭曲面内的电量的代数和。

**思考题：**怎样证明高斯定理？如果库仑力不是精确地与电荷间的距离成平方反比关系，那么高斯定理成立吗？

对高斯定律的理解应注意以下几点：①高斯定律表达式左方的场  $\mathbf{E}$  是曲面上各点的场强，它是由全部电荷（既包括封闭曲面内又包括封闭曲面外的电荷）共同产生的合场强，并非只由封闭曲面内的电荷  $\sum q_i$  所产生；②通过封闭曲面的总电通量只取决于它所包围的电荷，即只有封闭曲面内部的电荷才对这一总电通量有贡献，封闭曲面外部电荷对总电通量无贡献；③高斯定理表明静电场是有源场，这一点从电力线角度很容易理解。

高斯定理是以库仑定律为基础建立的，但库仑定律只适用于静电场，而高斯定理不仅适用于静电荷和静电场，也适用于运动电荷和变化的电场，它是电磁场的基本定理之一。

## (3) 静电场的环路定理

静电场的环路定理的数学形式为

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (4-16)$$

环路定理指出：在静电场中，电场强度的环流等于零。或者说，在静电场中作用在单位正电荷上的电场力，沿一闭合路径对该电荷所做的功等于零。它是反映静电场基本特性

的又一个重要规律。任何力场，只要具备场强的环流为零这一特性，即称为保守场，或势场。综合静电场的高斯定理和环路定理，可知静电场是有源的保守力场，又由于电场线是不闭合的，即不形成旋涡，所以静电场属于无旋场。

### 3. 电场强度与电势梯度的关系

#### (1) 等势面

在电场中，电势相等的点所组成的曲面叫作等势面，不同的电荷分布形成的电场具有不同形状的等势面，相邻两等势面的电势差相等。等势面与场强之间有如下的一般关系：

①等势面与电场线处处正交；电场线的方向，亦即电场强度的方向，总是指向电势降低的方向；②等势面分布较密的地方，电场强度较大；③电荷沿等势面移动时，电场力不做功。

注意：实际的等势面是一些三维的曲面。

#### (2) 电场强度与电势梯度的关系

设在静电场中，选取两个十分接近的等势面 1 和 2，如图 4.5 所示，其电势分别为  $U$  和  $U+dU$ ，并设  $dU>0$ 。在等势面 1 上任取一点  $P_1$ ，过  $P_1$  作等势面的法线，并规定沿电势升高的方向为法线的正方向，用  $\mathbf{e}_n$  代表沿此方向的单位矢量。由于电场强度  $\mathbf{E}$  与等势面垂直，并指向电势降低的方向，所以场强  $\mathbf{E}$  与  $\mathbf{e}_n$  反向。法线与等势面 2 相交于  $P_2$  点。 $P_1$  和  $P_2$  间的距离  $dR$  是两面间的最短距离。 $d\mathbf{l}$  代表  $P_1$  点距等势面 2 上的任一点  $P_3$  的距离， $d\mathbf{l}$  的方向如图 4.5 所示。

由于点  $P_1$  和  $P_3$  是十分接近的两点，故这两点的电势差

$$U - (U + dU) = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

若以  $E_l$  代表  $\mathbf{E}$  沿  $d\mathbf{l}$  方向上的分量，可得

$$-dU = E_l d\mathbf{l}, \text{ 即 } E_l = -\frac{dU}{d\mathbf{l}}$$

上式说明，电势沿  $d\mathbf{l}$  方向上的空间变化率与电场强度在  $d\mathbf{l}$  方向上的分量大小相等，方向相反。

若取  $d\mathbf{l}$  沿等势面切向，则电场强度沿此方向的分量为零，即电势的空间变化率为零；如果取  $d\mathbf{l}$  沿  $\mathbf{e}_n$  方向，而己知电场强度的法向分量大小等于  $E$ ，则应有  $E = -\frac{\partial U}{\partial n}$ ，进一步写成矢量式

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial U}{\partial n} \mathbf{e}_n \quad (4-17)$$

定义矢量  $\frac{\partial U}{\partial n} \mathbf{e}_n$  为电势梯度。电势梯度是一个矢量，它的大小等于电势沿等势面法向的空间变化率，其方向沿等势面的法向，指向电势增加的方向。式 (4-17) 表明，静电场中任何一点的电场强度  $\mathbf{E}$  等于该点电势梯度矢量的负值。

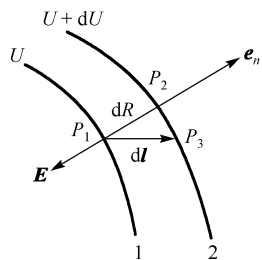


图 4.5 电场强度与电势梯度的关系示意图

通常将式(4-17)用直角坐标分量形式来表示。取  $d\mathbf{l}$  分别沿直角坐标  $x$ 、 $y$ 、 $z$  轴的方向, 得到

$$E_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

故可将式(4-17)表示成

$$\mathbf{E} = E_x \mathbf{i} + E_y \mathbf{j} + E_z \mathbf{k} = -\left( \frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{k} \right)$$

引入梯度算子  $\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$ , 则上式可简写成

$$\mathbf{E} = -\nabla U \quad (4-18)$$

由式(4-17)可知场强的单位为  $\text{V/m}$ , 它与场强的另一个单位  $\text{N/C}$  是等价的。

#### 4. 电场强度的计算

##### (1) 应用点电荷电场强度公式和场强叠加原理

对于离散分布电荷可应用式(4-5)和式(4-6)分别计算点电荷和点电荷系的电场强度。

对于电荷连续分布(宏观物体所带电量远大于电荷单元  $e$  时, 可以认为电荷连续地分布在带电体上)的带电体电场的电场强度, 一般的处理方法是将电荷连续分布的带电体上的电荷可看成是由许多无限小的电荷元  $dq$  组成的, 而每个电荷元都可以当作点电荷来处理。设其中任何一个电荷元  $dq$  在  $p$  点产生的场强为  $d\mathbf{E}$ , 根据式(4-5), 场点  $p$  的电场强度为

$$d\mathbf{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r$$

式中,  $r$  是电荷元  $dq$  到场点  $p$  的距离, 而  $\mathbf{e}_r$  是这一方向上的单位矢量。整个带电体在  $p$  点所产生的总场强可用积分计算

$$\mathbf{E} = \int d\mathbf{E} = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r \quad (4-19)$$

积分遍及整个带电体。注意式(4-19)是矢量积分, 通常在直角坐标系下进行, 首先将  $d\mathbf{E}$  沿坐标轴进行分解

$$d\mathbf{E} = dE_x \mathbf{i} + dE_y \mathbf{j} + dE_z \mathbf{k}$$

然后对每个分量积分  $E_x = \int dE_x$ ,  $E_y = \int dE_y$ ,  $E_z = \int dE_z$ , 于是  $p$  点的场强为

$$\mathbf{E} = E_x \mathbf{i} + E_y \mathbf{j} + E_z \mathbf{k} \quad (4-20)$$

对于由许多电荷组成的电荷系来说, 如果电荷分布为已知, 那么根据场强叠加原理, 并利用点电荷场强公式, 就可求出电场中任意点的场强, 即求出电场的空间分布。

### (2) 应用高斯定理

当电荷分布具有某些特殊的对称性,从而使相应的电场也具有一定的对称性时,就有可能应用高斯定理来计算电场强度  $\mathbf{E}$ 。具体计算时,应注意如下几点:首先选择的高斯面要通过待求电场强度  $\mathbf{E}$  的场点  $p$ ;其次使电场强度垂直于高斯面,且大小处处相等,或者在高斯面上的某一部分电场强度处处相等且方向与该面垂直,另一部分上电场强度与该面平行,因而通过的  $\mathbf{E}$  的能量为零。考虑到上述限制,因此直接应用高斯定理只能求某些对称分布电场的电场强度。

### (3) 应用电场强度与电势梯度的关系

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial U}{\partial n} \mathbf{e}_n \quad (4-21)$$

通常将式(4-21)用直角坐标分量形式来表示。取  $d\mathbf{l}$  分别沿直角坐标  $x$ 、 $y$ 、 $z$  轴的方向,得到

$$E_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

故可将式(4-21)表示成

$$\mathbf{E} = E_x \mathbf{i} + E_y \mathbf{j} + E_z \mathbf{k} = -\frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{j} - \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{k}$$

## 5. 电势的计算

### (1) 已知场强计算电势

由电势的定义式(4-7)计算  $U_a = \int_a^{\text{零势点}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ , 从场点  $a$  到零势点可选取任一方便的路径进行积分。

### (2) 利用电势叠加原理计算电势

这种方法是从点电荷电场的电势出发,应用电势的叠加原理(见式(4-9))来计算任一电荷系电场的电势。

对于电荷连续分布的带电体,可将带电体分为许多电荷元  $dq$ ,把每个电荷元当成点电荷,其电势为

$$dV = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r}$$

根据电势叠加原理,整个带电体在电场中某点产生的电势可由如下积分求出

$$V = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (4-22)$$

上式是对整个电荷所在的空间进行积分计算的。

## 4.3 重点难点分析

### 1. 本章重点

本章是电磁学的基础，以“点电荷”及“场”等为模型，研究静电场的基本特性。即电荷与电荷之间存在电场，电场对电荷有力的作用，在电场中移动电荷电场力要做功。与质点运动学类似，也要确定空间电磁状态分布的情况。也就是说，在电场中如果某点的电场强度  $\mathbf{E}$  和电势  $V$  已知，那么该场点的状态就确定了。因此，求解静电场中给定点的电场强度和电势以及电场强度和电势的空间分布是本章研究的重点。具体地，掌握库仑定律、电场强度、电通量、电势、电势差等基本概念；灵活地应用场强叠加原理、高斯定理等基本规律，对电场强度、电通量、电势进行计算；掌握场强与电势梯度的关系。

### 2. 本章难点

难点一是对“点电荷”、“场”等模型的理解；难点二是对描述电场的两个基本物理量（电场强度、电势）的求解。一般情况下，对电场强度和电势的求解需应用（电场强度、电势）叠加原理，而在应用叠加原理时，选取电荷元  $dq$  比较困难。选取电荷元  $dq$  的具体方法是：①要能对应地写出  $d\mathbf{E}$  和  $dV$ ；②积分  $\mathbf{E} = \int d\mathbf{E}$  或  $V = \int dV$  要能进行计算；③可利用一些简单带电体（线  $dq = \lambda dl$ 、面  $dq = \sigma dl$ 、体  $dq = \rho dl$ ）的电场强度和电势的已有结果，写出  $d\mathbf{E}$  和  $dV$  的表达式，然后进行积分计算。

注意：① 只有在带电体具有对称情况时，才能直接应用高斯定理求出带电体相应的电场强度分布；② 应用环路定理时，注意积分是对任意路径的选择；③ 应用  $\mathbf{E} = -\nabla V = -\text{grad} V$  时，因为电势是标量，通常标量计算比较简便，因此在求得电势分布后，只需进行空间导数运算便可算出电场强度的各个分量，这样就可避免较复杂的矢量运算。

## 4.4 精选例题分析

**例 4-1** 求电偶极子中垂线上任意一点的电场强度。

分析：两个大小相等的正、负电荷  $+q$  和  $-q$ ，当两者之间的距离  $l$  比从它们到所讨论的场点的距离小得多时，这个电荷系统就称为电偶极子，如图 4.6 所示。从负电荷到正电荷的矢径  $\mathbf{l}$  的方向作为轴线的正方向，电量  $q$  与矢径  $\mathbf{l}$  的乘积称为电偶极矩或电矩，电矩是矢量，用  $\mathbf{p}$  表示，即  $\mathbf{p} = q\mathbf{l}$ 。

**解:** 令中垂线上  $P$  点到电偶极子的中心  $O$  的距离为  $r$  ( $r \gg l$ )。电荷  $+q$  和  $-q$  在  $P$  点所产生的场强  $E_+$  和  $E_-$  的大小分别为

$$E_+ = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2 + \frac{l^2}{4}}, \quad E_- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2 + \frac{l^2}{4}}$$

方向分别在  $+q$  和  $-q$  到  $P$  点的连线上, 前者背向正电荷, 后者指向负电荷。设连线与电偶极子轴线之间的夹角为  $\alpha$ , 可知  $P$  点的总场强  $E_P$  的大小为

$$E_P = E_+ \cos \alpha + E_- \cos \alpha$$

因  $\cos \alpha = \frac{l}{2\sqrt{r^2 + \frac{l^2}{4}}}$ , 所以

$$E_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ql}{\left(r^2 + \frac{l^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

根据  $r \gg l$  条件, 有  $\left(r^2 + \frac{l^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}} \approx r^3$ , 由此可得

$$E_P = \frac{ql}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

或

$$\mathbf{E}_P = -\frac{\mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

式中负号表明电偶极子中垂线上距离电偶极子中心较远处各点的电场强度与电偶极子的电矩方向相反。

**例 4-2** 有一均匀带电直线, 长为  $L$ , 电量为  $q$ , 设线外任一场点  $P$  到直线的垂直距离为  $a$ ,  $P$  点和直线两端的连线与直线之间的夹角分别为  $\theta_1$  和  $\theta_2$ 。求  $P$  点的场强。

**解:** 此类题可按下列步骤求解:

(1) 选定便于计算的坐标系, 确定电荷元。取坐标如图 4.7 所示, 在距原点  $O$  为  $x$  处取长为  $dx$  的线元, 则相应的电荷元

$$dq = \frac{q}{L} dx = \lambda dx, \quad \lambda = \frac{q}{L}$$

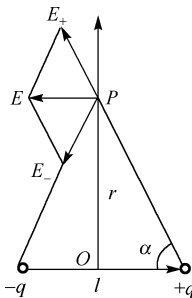


图 4.6 电偶极子的电场

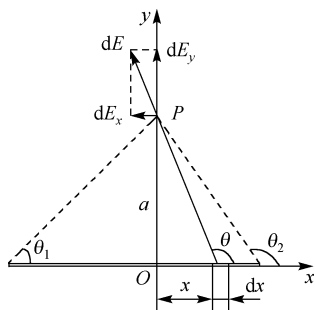


图 4.7 例 4-2 解图

(2) 将  $dq$  作为点电荷, 列出它在  $P$  点的场强  $d\mathbf{E}$ , 其大小为

$$dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

不同位置的电荷元在  $P$  点产生的场强  $d\mathbf{E}$  有不同的方向, 它们在  $x$  轴和  $y$  轴的两个分量为

$$dE_x = dE \cos \theta$$

$$dE_y = dE \sin \theta$$

(3) 统一积分变量, 定积分限, 完成积分, 得到所求场强分量

$$E_x = \int dE_x = \int dE \cos \theta = \int \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \theta$$

$$E_y = \int dE_y = \int dE \sin \theta = \int \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sin \theta$$

在上述积分的被积函数中,  $r$ 、 $\theta$  和  $x$  均为变量, 将

$$r = a / \sin \theta, \quad x = -a \cot \theta, \quad dx = a \csc^2 \theta d\theta$$

代入, 将被积函数化简为单一变量函数 ( $\theta$  的函数), 并确定积分限 ( $\theta_1$  和  $\theta_2$ ), 再进行积分, 得到

$$E_x = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} \cos \theta d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1)$$

$$E_y = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} \sin \theta d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$$

于是  $P$  点的场强

$$\mathbf{E} = E_x \mathbf{i} + E_y \mathbf{j}$$

讨论:

(1) 若  $a \ll L$ , 即  $P$  点极靠近直线, 这时带电直线可视为无限长, 将  $\theta_1 = 0$  和  $\theta_2 = \pi$  代入得

$$E_x = 0$$

$$E_y = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a}$$

(2) 对于  $a \rightarrow 0$ , 则有两种情形: 一是  $P$  点趋 (位) 于带电直线, 二是  $P$  点处于带电直线的延长线上。这两种情形都不能直接应用上述计算结果。在第一种情形中得到无限大的场强, 所以是无意义的; 第二种情形中也得不到确定的结果。必须应用电场强度公式 (4-19) 直接计算才能得到相应的正确结果 (此时  $dq = \lambda dl$ ,  $r$  为电荷元  $dq$  到场点的距离)。



**例 4-3** 半径为  $R$  的均匀带电细圆环, 电量为  $q$ 。求圆环轴线上任意一点的场强。

**解:** 取如图 4.8 所示的坐标, 设场点  $P$  距原点 (环心)  $O$  为  $x$ , 在环上取电荷元

$$dq = \frac{q}{2\pi R} dl = \lambda dl$$

$dq$  在  $P$  点产生场强  $dE$  的大小为

$$dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

由于圆环对  $P$  点是轴对称的, 故可将  $dE$  分解为平行于  $x$  轴的分量  $dE_{//}$  和垂直于  $x$  的分量  $dE_{\perp}$ 。各个电荷元在  $P$  点的垂直于  $x$  轴的分量  $dE_{\perp}$  是相互抵消的, 故可直接得到

$$E_{\perp} = 0$$

因此  $P$  点的场强大小

$$\begin{aligned} E &= \int dE_{//} = \int \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos\theta = \frac{\lambda \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \int_0^{2\pi R} dl = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos\theta \\ &= \frac{qx}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + R^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

而  $E$  的方向沿  $x$  轴的方向。

若  $x = 0$ , 则  $E = 0$ , 即在环心上的场强为零。又若  $x \gg R$ , 则有

$$E \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x^2}$$

可见在远离环心处的场强近似等于点电荷的场强。

**例 4-4** 有一均匀带电的薄圆盘, 半径为  $R$ , 电荷面密度为  $\sigma$ 。求圆盘轴线上任意一点的场强。

**解:** 因为圆盘面是二维的, 若从点电荷场强出发, 就要对电荷元进行二重积分计算, 但如果应用适当的公式, 也可只做一重积分运算。下面用两种方法求解。

**解法 1:** 取坐标如图 4.9(a)所示, 场点  $P$  距盘心  $O$  为  $x$ , 在圆盘上距  $O$  点  $r$  到  $r + dr$  处, 圆心角在  $\theta$  到  $\theta + d\theta$  之间取电荷元

$$dq = \sigma r d\theta dr$$

电场的场强大小为

$$dE = \frac{\sigma r d\theta dr}{4\pi\epsilon_0 d^2}$$

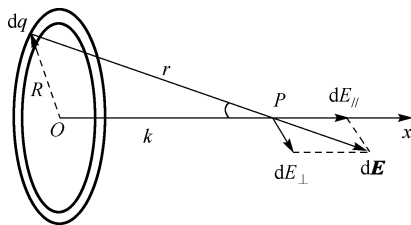


图 4.8 例 4-3 解图

因为圆盘对  $P$  点呈对称性,  $d\mathbf{E}$  在垂直于  $x$  轴方向上的分量是相互抵消的, 而平行  $x$  轴的分量

$$dE_x = \frac{\sigma r d\theta dr}{4\pi\epsilon_0 d^2} \cos\phi = \frac{\sigma r d\theta dr}{4\pi\epsilon_0 d^2} \frac{x}{d} = \frac{\sigma x r d\theta dr}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + r^2)^{3/2}}$$

于是带电圆盘在  $P$  点所产生电场的场强为

$$E = \int dE_x = \frac{\sigma x}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{r dr}{(x^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right)$$

图中  $P$  点的  $\mathbf{E}$  沿  $x$  轴的方向。

**解法 2:** 将带电圆盘面当作是由以  $O$  为圆心, 由不同半径的许多带电细圆环组成 (见图 4.9(b))。任一细圆环的面积 (垂直于  $x$  轴的面) 可取为  $2\pi r dr$ , 其电荷元

$$dq = 2\pi\sigma r dr$$

再利用例题 4-3 得到的带电细圆环在轴线上的场强公式, 得到上述电荷元  $dq$  在  $P$  点所产生电场的场强大小为

$$dE = \frac{x\sigma 2\pi r dr}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + r^2)^{3/2}}$$

因此, 带电圆盘在  $P$  点的场强大小为

$$E = \int dE = \frac{2\pi\sigma x}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{r}{(x^2 + r^2)^{3/2}} dr = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right)$$

可见, 由于利用了带电圆环的场强公式, 从而省去了一重积分的计算。

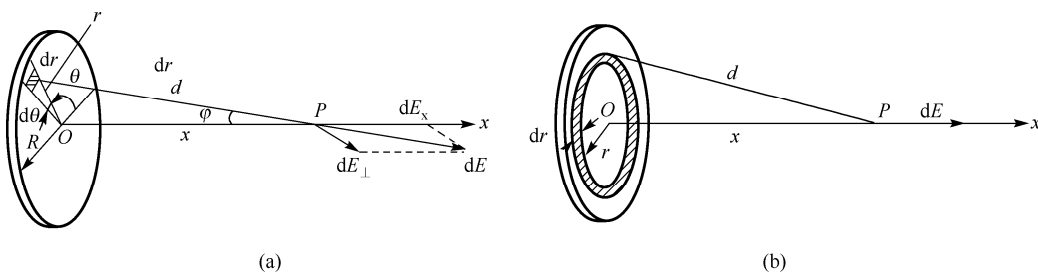


图 4.9 例 4-4 解图 1

讨论:

(1) 若  $x \ll R$ , 有限的盘面对  $P$  点可视为无限大平面, 这时有

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

即对于无限大带电平面,它在空间所产生电场的场强大小处处相等,而方向垂直于平面。若平面带正电,则 $\mathbf{E}$ 从带电平面指向两侧;若平面带负电,则 $\mathbf{E}$ 从两侧指向带电平面。

(2) 如果将两块平板面对面平行放置,板面尺度远大于板面间距离,当使两板均匀地带上等量异号电荷,且电荷面密度为 $\pm\sigma$ 时,则在两板内侧和外侧所产生电场的场强可按两个无限大带电平面的场强进行叠加(见图4.10):

$$\text{在两板之间} \quad E = E_A + E_B = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$\text{在两板外侧} \quad E = E_A - E_B = 0$$

即当两平行板带等量异号电荷时,其电场集中在两板之间,而且是匀强的。这是实验中经常用来产生匀强电场的装置。实际上因为带电板总是有限大小的,在其边缘附近电场分布变得很复杂,通常称为边缘效应。

(3) 若 $x \gg R$ ,则由场强公式得

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left( 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{x^2}}} \right)$$

将 $\left(1 + \frac{R^2}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ 用二项式定理展开,得

$$\left(1 + \frac{R^2}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{R^2}{x^2}\right) + \frac{3}{8} \left(\frac{R^2}{x^2}\right)^2 - \dots \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{R^2}{x^2}$$

得到

$$E \approx \frac{\sigma R^2}{4\varepsilon_0 x^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$$

显然,这时带电小圆盘产生的电场近似等于点电荷的电场。

**例4-5** 求均匀带电球体的电场分布。已知球半径为 $R$ ,所带的总电量为 $q$ (设 $q > 0$ )。

**解:** 由于电荷分布是球对称的,所以场强分布也应该是球对称的,即与带电球体同心的球面上各点场强的大小一定相等,而方向都沿各自的矢径方向(见图4.11)。

先求球外任一点 $A$ 处的场强。以 $A$ 到球心的距离 $r$ ( $r > R$ )为半径作一同心球面(高斯面),通过此高斯面的电通量为

$$\Phi_e = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S E dS = E \oint_S dS = E \cdot 4\pi r^2$$

此高斯面所包围的电荷 $\sum q_{\text{内}} = q$ 。根据高斯定理,有

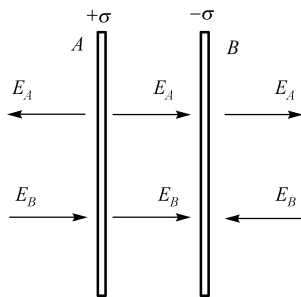


图4.10 例4-4解图2

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

由此得出

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (r \geq R)$$

此结果说明, 均匀带电球体外的场强分布与球体中的电荷都集中在球心时所形成的一个点电荷所产生的场强分布一样。

下面再求球体内任一点  $B$  处的场强。以  $B$  到球心距离  $r$  ( $r < R$ ) 为半径作一同心球面为高斯面, 通过此高斯面的电通量仍为  $E \cdot 4\pi r^2$ 。此高斯面所包围的电荷为

$$\sum q_{\text{内}} = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \times \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{qr^3}{R^3}$$

由高斯定理可得

$$E = \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} \quad (r \leq R)$$

描述电场分布的  $E \sim r$  曲线见图 4.11。

**例 4-6** 求无限长的均匀带电圆柱面的电场分布。已知圆柱面的半径为  $R$ , 单位长度的电量为  $\lambda$  ( $\lambda > 0$ )。

分析: 由于电荷分布具有轴对称性, 带电圆柱面产生的电场也具轴对称性, 即离开圆柱面轴线等距离各点的场强大小相等, 方向都垂直于圆柱面向外 (见图 4.12(b)) 为了求出无限长圆柱面外任一点  $P$  的场强, 可过  $P$  点作一封闭圆柱面 (高斯面), 柱面高为  $l$ , 底面半径为  $r$ , 轴线与无限长带电柱面的轴线重合 (见图 4.12(a))。由于此高斯面的侧面上各点  $E$  的大小相等, 方向处处与侧面正交, 所以通过该侧面的电通量是  $E \cdot 2\pi r \cdot l$ ; 通过两底面的电通量显然为零。封闭柱面 (高斯面) 所包围的电荷为  $\lambda l$ 。

**解:** 由高斯定理得

$$E \cdot 2\pi r \cdot l = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}$$

计算得

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \quad (r > R)$$

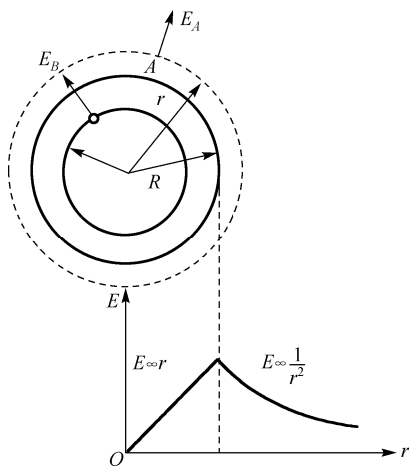


图 4.11 例 4-5 解图

根据同样的讨论, 可知带电柱面内部各点的场强为零, 即

$$E = 0 \quad (r < R)$$

$E \sim r$  曲线如图 4.12(c) 所示。

**例 4-7** 求无限大均匀带电平面的电场分布。已知带电平面的电荷面密度为  $\sigma$ 。

分析: 考虑距离平面为  $r$  的  $P$  点的场强  $\mathbf{E}$ , 由于电荷均匀分布, 对于垂线  $OP$  是对称的 (见图 4.13), 所以  $P$  点的场强必然垂直于该带电平面。又由于电荷分布在一个无限大平面上, 所以电场分布必然对该平面对称, 而且离平面等距离处 (两侧一样) 的场强大小都相等, 方向都垂直指离平面 (当  $\sigma > 0$  时)。

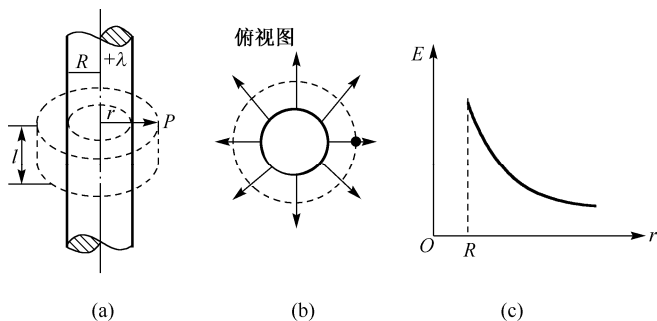


图 4.12 例 4-6 解图

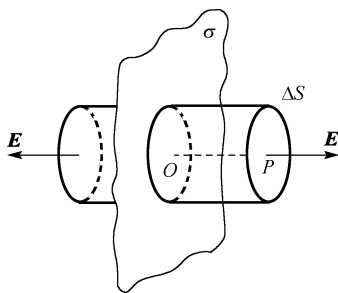


图 4.13 例 4-7 解图

**解:** 选一个其轴垂直于带电平面的圆筒式的封闭面作为高斯面  $S$ , 带电平面平分此圆筒, 而  $P$  点位于它的一个底上。

由于圆筒的侧面上各点的  $\mathbf{E}$  与侧面平行, 所以通过侧面的电通量为零。因而只需计算通过两底面的电通量。以  $\Delta S$  表示一个底的面积, 则

$$\Phi_e = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{两底}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 2E\Delta S$$

由于

$$\sum q_{\text{内}} = \sigma \Delta S$$

由高斯定理得

$$2E\Delta S = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma \Delta S$$

从而

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

此结果说明, 无限大均匀带电平面两侧的电场是均匀的。这一结果与例 4-4 在  $x \ll R$  时的结果是一样的。

上述各例中的带电体的电荷分布都具有某种对称性, 利用高斯定理计算这类带电体的场强分布是很方便的。不具有特定对称性的电荷分布, 其电场不能直接用高斯定理求出, 但对于这些电场高斯定理仍然成立。

**例 4-8** 求半径为  $R$ 、均匀带电为  $q$  的细圆环轴线上任意一点的电势, 如图 4.14 所示。

**解:** (通过本例来验证计算电势两种方法的等效性。)

(1) 已知场强求电势: 由例 4-3 可知细圆环轴线上任意一点  $P$  的场强大小为

$$E = \frac{qx}{4\pi\epsilon_0(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

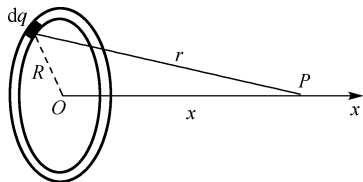


图 4.14 例 4-8 图

考虑到计算场强的线积分可选取任意一路径, 这里选沿  $x$  轴进行积分, 取无限远为电势零点, 则  $P$  点电势

$$\begin{aligned} U &= \int_P^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_x^\infty \frac{qx}{4\pi\epsilon_0(R^2 + x^2)^{3/2}} dx \\ &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} (R^2 + x^2)^{-1/2} \Big|_x^\infty = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(R^2 + x^2)^{1/2}} \end{aligned}$$

(2) 利用电势叠加法: 在圆环上取任意一电荷元,  $dq = \lambda dl$ ,  $\lambda = \frac{q}{2\pi R}$ , 而圆环在  $P$  点的电势为

$$\begin{aligned} U &= \int_0^{2\pi R} \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0 r} = \int_0^{2\pi R} \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0(R^2 + x^2)^{1/2}} \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0(R^2 + x^2)^{1/2}} \int_0^{2\pi R} dl = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(R^2 + x^2)^{1/2}} \end{aligned}$$

可见由两种解法得到的结果相同。所以, 今后采用哪种方法计算电势可根据是否简便而定。

**例 4-9** 求半径为  $R$ 、总电量为  $q$  的均匀带电球面的电势分布。

**解:** 由于电荷为球对称分布, 很容易根据高斯定理求出其场强分布为

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{r}, & (r > R) \\ 0, & (r < R) \end{cases}$$

选定无限远处的电势为零, 并沿径向积分, 得到球面外任一场点  $P$  的电势为

$$U = \int_P^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_r^\infty \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (r \geq R)$$

球面内任一场点  $P$  的电势为

$$\begin{aligned} U &= \int_P^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_r^R \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} + \int_R^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \\ &= 0 + \int_R^\infty \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (r \leq R) \end{aligned}$$

即球面外任一场点的电势与所有电荷集中在球心的点电荷产生的电势相同, 而球面内任一点的电势都等于球面上的电势。

电势随  $r$  的变化曲线 ( $U \sim r$  曲线) 如图 4.15 所示。由图可知, 电势是空间坐标的连续函数。本题中的场强  $E$  是不连续的。

**例 4-10** 有一无限长均匀带电直线, 电荷线密度为  $\lambda$  (见图 4.16), 求场中各点的电势分布。

**解:** 所谓无限长, 原仅具有物理上的相对意义, 但进行数学处理时是作为真正无限长来计算的。因此, 无限长带电直线的电荷分布是扩展到无限远的。在这种情况下不能应用以点电荷的电势公式为基础的电势叠加法, 所以必须由场强来求电势。

已知无限长均匀带电直线的场强公式为

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

$\mathbf{E}$  的方向垂直带电直线向外 ( $\lambda > 0$  时)。选取距离带电直线为  $r_0$  的任意一点  $P_0$  为零电势点, 根据定义式 (4-7), 场中任意一点  $P$  的电势为

$$\begin{aligned} U_P &= \int_P^{P_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_r^{r_0} E dr = \int_r^{r_0} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} dr \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r_0 - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_0}{r} \end{aligned}$$

显然, 若仍取  $r_0 = \infty$  为电势零点, 必得到  $U_P = \infty$ 。所以, 对于无限长均匀带电直线, 不能将电势零点选在无限远处。为了在有限区域内比较各点电势的相对大小, 将电势零点选择在有限区域内是合理的。若  $\lambda > 0$ , 在  $r < r_0$  的区域, 电势为正; 在  $r > r_0$  的区域, 电势为负。

与无限长均匀带电直线类似的情况还有无限长带电圆柱、带电圆筒等。

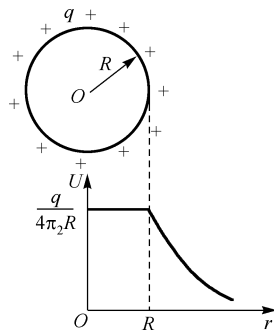


图 4.15 例 4-9 图

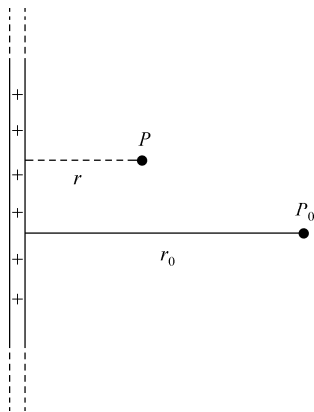


图 4.16 例 4-10 图

## 4.5 习题

4.1 图 4.17 所示的曲线表示某种球对称性静电场的场强大小  $E$  随径向距离  $r$  变化的关系, 请指出该电场是由下列哪一种带电体产生的?

- (A) 半径为  $R$  的均匀带电球面  
 (B) 半径为  $R$  的均匀带电球体  
 (C) 点电荷  
 (D) 外半径为  $R$ , 内半径为  $R/2$  的均匀带电球壳体

4.2 电场中, 下列说法中正确的是 ( )。

- (A) 带正电的导体, 其电势一定是正值 (B) 等势面上各点的场强一定相等  
 (C) 场强为零处, 电势也一定为零 (D) 场强相等处, 电势梯度矢量一定相等

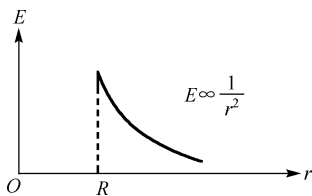


图 4.17 习题 4.1 图

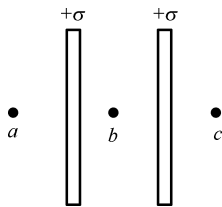


图 4.18 习题 4.3 图

4.3 如图 4.18 所示, 两无限大平行平板, 其电荷面密度均为  $+\sigma$ , 则图中三处的电场强度的大小分别为 ( )。

- (A)  $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ ,  $0$ ,  $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$  (B)  $0$ ,  $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ ,  $0$   
 (C)  $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ ,  $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ ,  $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$  (D)  $0$ ,  $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ ,  $0$

4.4 关于静电场中某点电势值的正负, 下列说法中正确的是 ( )。

- (A) 电势值的正负取决于置于该点的实验电荷的正负  
 (B) 电势值的正负取决于电场力对实验电荷做功的正负  
 (C) 电势值的正负取决于电势零点的选取  
 (D) 电势值的正负取决于产生电场的电荷的正负

4.5 由真空中静电场的高斯定理  $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q$  可知 ( )。

- (A) 闭合面内的电荷代数和为零时, 闭合面上各点场强一定为零  
 (B) 闭合面内的电荷代数和不为零时, 闭合面上各点场强一定都不为零  
 (C) 闭合面内的电荷代数和为零时, 闭合面上各点场强不一定都为零  
 (D) 闭合面内无电荷时, 闭合面上各点场强一定为零

4.6 如图 4.19 所示, 在点电荷  $q$  的电场中, 选取以  $q$  为中心、 $R$  为半径的球面上一点  $P$  处为电势零点, 则与点电荷  $q$  距离为  $r$  的  $P'$  点的电势为 ( )。

- (A)  $\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$  (B)  $\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right)$  (C)  $\frac{q}{4\pi\epsilon_0 (r-R)}$  (D)  $\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right)$



4.7 一个半径为  $R$ 、电荷线密度为  $\lambda_1$  的均匀带电圆环，在其轴线上放一长为  $l$ 、电荷线密度为  $\lambda_2$  的均匀带电直线段，该线段的一端处于圆环中心处，如图 4.20 所示。求该直线段受到的电场力。

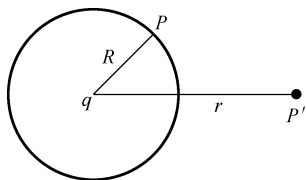


图 4.19 习题 4.6 图

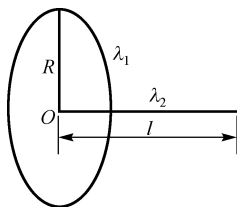


图 4.20 习题 4.7 图

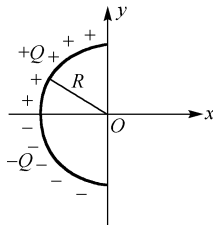


图 4.21 习题 4.8 图

4.8 一个细玻璃棒被弯成半径为  $R$  的半圆形，沿其上半部分均匀分布有电荷  $+Q$ ，沿其下半部分均匀分布有电荷  $-Q$ ，如图 4.21 所示。试求圆心  $O$  处的电场强度。

4.9 在真空中一长为  $l=10\text{cm}$  的细杆上均匀分布着电荷，其电荷线密度  $\lambda=1.0\times 10^{-5}\text{C/m}$ 。在杆的延长线上，距杆的一端距离  $d=10\text{cm}$  的一点上，有一点电荷  $q_0=2.0\times 10^{-5}\text{C}$ ，如图 4.22 所示。试求该点电荷所受的电场力。（真空介电常量  $\epsilon_0=8.85\times 10^{-12}\text{C}^2\cdot\text{N}^{-1}\cdot\text{m}^{-2}$ ）

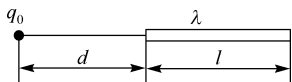


图 4.22 习题 4.9 图

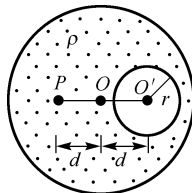


图 4.23 习题 4.11 图

4.10 在半径为  $R$  的“无限长”直圆柱体内均匀带电，电荷体密度为  $\rho$ ，求圆柱体内、外的场强分布，并作  $E\sim r$  关系曲线。

4.11 一球体内均匀分布着电荷体密度为  $\rho$  的正电荷，若保持电荷分布不变，在该球体中挖去半径为  $r$  的一个小球体，球心为  $O'$ ，两球心间距离  $\overline{OO'}=d$ ，如图 4.23 所示。求：

(1) 在球形空腔内，球心  $O'$  处的电场强度  $\mathbf{E}_0$ ；

(2) 在球体内  $P$  点处的电场强度  $\mathbf{E}$ ，设  $O'$ 、 $O$ 、 $P$  三点在同一直径上，且  $\overline{OP}=d$ 。

4.12 电荷量  $Q$  均匀分布在半径为  $R$  的球体内，试求：离球心  $r$  处 ( $r < R$ )  $P$  点的电势。

4.13 电荷以相同的面密度  $\sigma$  分布在半径为  $r_1=10\text{cm}$  和  $r_2=20\text{cm}$  的两个同心球面上，设无限远处电势为零，球心处的电势为  $U_0=300\text{V}$ 。（ $\epsilon_0=8.85\times 10^{-12}\text{C}^2\cdot\text{N}^{-1}\cdot\text{m}^{-2}$ ）

(1) 求电荷面密度  $\sigma$ ；

(2) 若要使球心处的电势也为零，外球面上电荷面密度  $\sigma'$  为多少？

4.14 如图 4.24 所示, 在坐标  $(a, 0)$  处放置一点电荷  $+q$ , 在坐标  $(-a, 0)$  处放置另一点电荷  $-q$ 。  $P$  点是  $x$  轴上的一点, 坐标为  $(x, 0)$ 。当  $x \gg a$  时, 该点场强的大小为 ( )。

- (A)  $\frac{q}{4\pi\epsilon_0 x}$  (B)  $\frac{qa}{\pi\epsilon_0 x^3}$  (C)  $\frac{qa}{2\pi\epsilon_0 x^3}$  (D)  $\frac{q}{4\pi\epsilon_0 x^2}$

4.15 如图 4.25 所示为一沿轴放置的无限长分段均匀带电直线, 电荷线密度分别为  $+\lambda$  ( $x < 0$ ) 和  $-\lambda$  ( $x > 0$ )。则  $Oxy$  坐标平面上  $P$  点  $(0, a)$  处的电场强度矢量为 ( )。

- (A) 0 (B)  $\frac{\lambda i}{2\pi\epsilon_0 a}$  (C)  $\frac{\lambda i}{4\pi\epsilon_0 a}$  (D)  $\frac{\lambda(i+j)}{2\pi\epsilon_0 a}$

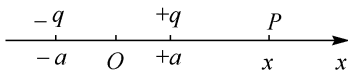


图 4.24 习题 4.14 图

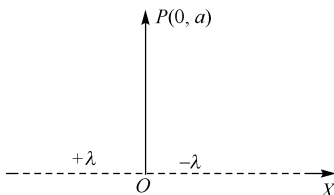


图 4.25 习题 4.15 图

4.16 有一非均匀电场, 其场强为  $\mathbf{E} = (E_0 + kx)\mathbf{i}$  (式中  $k$  为一常量), 则通过如图 4.26 所示的边长为  $0.53\text{m}$  的立方体的电通量为 ( )。

- (A) 0 (B)  $0.45k$  (C)  $0.3k$  (D)  $0.15k$

4.17 对静电场高斯定理的理解, 下列说法中哪一个是正确的?

- (A) 如果通过高斯面的电通量不为零, 则高斯面内必有净电荷  
(B) 如果通过高斯面的电通量为零, 则高斯面内必无电荷  
(C) 如果高斯面内无电荷, 则高斯面上电场强度必处处为零  
(D) 如果高斯面上电场强度处处不为零, 则高斯面内必有电荷

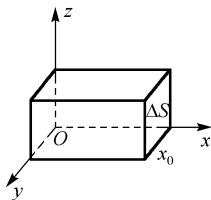


图 4.26 习题 4.16 图

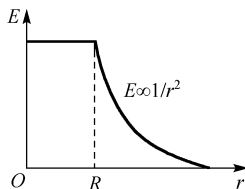


图 4.27 习题 4.18 图

4.18 图 4.27 所示为一具有球对称性分布的静电场的  $E \sim r$  关系曲线。请指出该静电场是由下列哪种带电体产生的 ( )。

- (A) 半径为  $R$  的均匀带电球面 (B) 半径为  $R$  的均匀带电球体  
(C) 半径为  $R$ 、电荷体密度  $\rho = Ar$  ( $A$  为常数) 的非均匀带电球体  
(D) 半径为  $R$ 、电荷体密度  $\rho = A/r$  ( $A$  为常数) 的非均匀带电球体

4.19 电荷为 $+q$ 和 $-2q$ 的两个点电荷分别置于 $x=1\text{m}$ 和 $x=-1\text{m}$ 处。一试验电荷置于 $x$ 轴上何处, 它受到的合力等于零?

4.20 如图 4.28 所示, 真空中一长为 $L$ 的均匀带电细直杆, 总电荷为 $q$ , 试求在直杆延长线上距杆的一端距离为 $d$ 的 $P$ 点的电场强度。

4.21 半径为 $R$ 的带电细圆环, 其电荷线密度为 $\lambda = \lambda_0 \sin\phi$ ,  $\lambda_0$ 为一常数,  $\phi$ 为半径 $R$ 与 $x$ 轴所成的夹角, 如图 4.29 所示。试求环心 $O$ 处的电场强度。

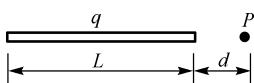


图 4.28 习题 4.20 图

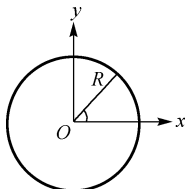


图 4.29 习题 4.21 图

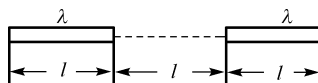


图 4.30 习题 4.22 图

4.22 两根相同的均匀带电细棒, 长为 $l$ , 电荷线密度为 $\lambda$ , 沿同一条直线放置。两细棒间最近距离也为 $l$ , 如图 4.30 所示。假设棒上的电荷是不能自由移动的, 试求两棒间的静电相互作用力。

4.23 半径为 $R_1$ 和 $R_2$  ( $R_1 < R_2$ ) 的两无限长同轴圆柱面, 单位长度分别带有电量 $\lambda$ 和 $-\lambda$ , 试求: (1)  $r < R_1$ ; (2)  $R_1 < r < R_2$ ; (3)  $r > R_2$  处各点的场强。

4.24 设真空中静电场 $\vec{E}$ 的分布为 $\vec{E} = c x \vec{i}$ , 式中 $c$ 为常量, 求空间电荷的分布。

4.25 如图 4.32 所示为一个均匀带电的球壳, 其电荷体密度为 $\rho$ , 球壳内表面半径为 $R_1$ , 外表面半径为 $R_2$ 。设无穷远处为电势零点, 求空腔内任一点的电势。

4.26 如图 4.33 所示, 半径为 $R$ 的均匀带电球面, 带有电荷 $q$ , 沿某一半径方向上有一均匀带电细线, 电荷线密度为 $\lambda$ , 长度为 $l$ , 细线左端离球心距离为 $r_0$ 。设球和线上的电荷分布不受相互作用影响, 试求细线所受球面电荷的电场力和细线在该电场中的电势能 (设无穷远处的电势为零)。

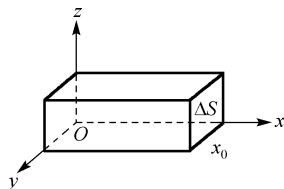


图 4.31 习题 4.24 图

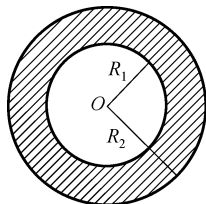


图 4.32 习题 4.25 图

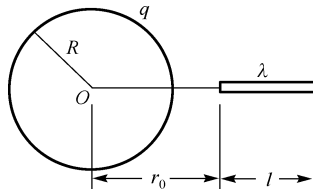


图 4.33 习题 4.26 图

## 第5章 静电场中的导体与电介质

从物质电结构理论的观点来看,任何物体都可能带电。根据导电性能的不同,物体可分为三类。第一类是导体:当物体的某部分带电后,如果能够把所带的电荷迅速地向其他部分分布开来,则这种物体称为导体,简称导体。各种金属,碱、酸或盐的溶液即化学中的电解质也是导体。第二类是绝缘体(电介质):如果物体某部分带电后,其电荷只能停留在该部分,而不能显著地向其他部分分布,这种不导电的物体称为绝缘体,又称电介质。玻璃、石蜡、硬橡胶、塑料、松香、丝绸、瓷器、纯水、干燥空气等都是电介质。由于电介质很难导电,所以它容易带电。第三类是半导体:导电性能介于导体和绝缘体之间,这类物质叫半导体。金属、电介质、半导体在现代科学与技术中是不可或缺的重要材料。

第4章研究了真空中的静电场,阐述了静电场的基本性质和规律。本章主要讨论导体和电介质在电场中的表现和行为,并介绍导体的电容和电容器静电场的能量。

### 5.1 学习要求

1. 理解处于静电平衡下的导体的场强、电势和电荷的分布特征;并能根据静电平衡条件来分析导体在静电场中的电荷分布和电场分布。

2. 会分析、判断和计算简单、规则形状导体或少数导体组成的导体系统处于静电平衡时的场强、电势和电荷分布。

3. 了解介质的极化和磁化的微观机理及特征、电极化强度矢量  $\mathbf{P}$ 。理解电位移矢量  $\mathbf{D}$ ,理解介质中的高斯定理,会用它们计算各向同性介质中的电位移矢量  $\mathbf{D}$  和电场强度  $\mathbf{E}$  的关系,并能由已知的电位移求相应的电场强度。

4. 理解电容的定义及其物理意义。

5. 理解电场的物质性以及电能密度的概念,在一些简单的对称情况下,能计算空间里贮存的电场能量。

### 5.2 内容提要

#### 1. 基本概念

① 静电平衡:一个不带电的导体放入静电场中,外电场引起导体中正、负电荷的重

新分布, 结果使导体一端带正电荷, 另一端带负电荷。导体表面所带的这种电荷称为感应电荷, 这种现象叫做静电感应。

② 电极化强度矢量  $\mathbf{P}$ : 为了描述电介质的极化程度, 引入极化强度矢量  $\mathbf{P}$ , 极化强度的定义是单位体积内的分子电偶极矩的矢量和。用  $\mathbf{p}_i$  表示在电介质中某一小体积  $\Delta V$  内的某个分子的电偶极矩, 则该处的极化强度矢量  $\mathbf{P}$  为

$$\mathbf{P} = \frac{\sum \mathbf{p}_i}{\Delta V} \quad (5-1)$$

③ 电位移矢量  $\mathbf{D}$ : 电位移矢量是引入的一个辅助物理量, 定义为

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (5-2)$$

$\mathbf{D}$  没有实际的物理意义, 它是描述电场的一个辅助物理量。引入  $\mathbf{D}$  的优点在于计算通过任一闭合曲面的电通量时, 可以不考虑极化电荷的分布。

④ 电容: 电容器是由两个用电介质 (或真空) 隔开的金属导体组成的, 这两个导体称为电容器的两个极板。电容器在工作时, 它的两个极板相对的两个表面上总是分别带上等量异号的电荷  $+Q$  和  $-Q$ 。这时两板间有一定的电势差  $\Delta U$ , 该电势差又称电容器的电压, 用  $V$  表示。定义电容器的电容为

$$C = \frac{Q}{V} \quad (5-3)$$

从上式可以看出, 在电势差 (即电压) 相同的条件下, 电容  $C$  越大的电容器, 所储存的电量越多。这说明电容是反映电容器储存电荷本领大小的物理量。在国际单位制 (SI) 中, 电容的单位是库/伏 (C/V), 叫做法拉 (F)。

⑤ 电能密度: 考虑到能量是储存在电场中的, 则电场的能量密度 (即单位体积内储存的电场能) 公式为

$$w_e = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} ED \quad (5-4)$$

## 2. 导体的静电平衡

### (1) 导体静电平衡条件

导体静电平衡的必要条件就是导体内任一点的电场强度都等于零。即导体的静电平衡状态是指导体内部和表面都没有电荷做定向移动的状态。

如果将导体置于静电场中, 导体中的自由电子将受到静电场的作用而产生定向运动, 这一运动将改变导体上的电荷分布: 原来呈中性的导体出现一些部位带正电, 另一些部位带负电的情况, 这种现象叫做静电感应。而原来带电的导体, 由于静电感应导体上的电荷将重新分布。这一电荷分布的变化又将反过来改变导体内部和周围的电场分布。这种电荷和电场分布的变化将一直进行直到导体达到静电平衡状态时为止, 这一过程是十分短暂的, 通常只经历  $10^{-14} \sim 10^{-13} \text{s}$ 。

## (2) 静电平衡状态下的导体所具有的性质

① 导体内部的场强处处为零，导体表面外紧邻导体处任何一点的场强方向垂直于该点的导体表面。

② 导体是等势体，其表面是等势面，且表面电势与内部电势相等。

## (3) 静电平衡下导体上的电荷分布

当导体处于静电平衡状态时，导体内部和表面不再有电荷做定向运动，导体上的电荷分布达到了稳定状态，具有以下特征：

① 实心导体内部各处净电荷为零，电荷只分布在导体表面上。

② 孤立的导体处于静电平衡时，它的表面各处的面电荷密度与各处表面的曲率有关，曲率越大的地方，面电荷密度也越大。

③ 导体内部有空腔，若空腔内无其他带电体，则在静电平衡时，不仅导体内部处处没有净电荷，而且空腔内表面上各处的面电荷密度也为零，电荷只能分布在导体的外表面上。

④ 导体内部有空腔，且空腔内有其他带电体，设带电体带电量为 $q$ ，则在静电平衡时，空腔内表面上分布有 $-q$ 的感应电荷，外表面上分布有 $Q+q$ 的电荷， $Q$ 是空腔导体原来所带电荷。

## 3. 静电屏蔽

一个接地的空心金属导体隔离了放在它内腔中的带电体与外界带电体之间的静电作用。这就是静电屏蔽的原理。这样的一个空心金属导体，称为静电屏（相当密集的金属网，对于距离比金属网缝隙大得多的地方来说，可以代替金属片作为静电屏）。静电屏在实际中应用广泛。

## 4. 电介质的电结构

电介质的主要特征是在它的分子中电子被原子核束缚得很紧，即使在外电场作用下，电子一般只能相对于原子核有微观的位移，而不象导体中的电子那样，能够脱离所属原子做宏观运动。因而电介质在宏观上几乎没有自由电荷，其导电性很差，故亦称为绝缘体。并且，在外电场作用下达到静电平衡时，电介质内部的场强也可以不等于零。

从分子由正、负电荷中心的分布来看，电介质可分为两类。一类电介质，如氯化氢（HCl）、水（H<sub>2</sub>O）、氨（NH<sub>3</sub>）、甲醇（CH<sub>3</sub>OH）等，分子内正、负电荷的中心不相重合，其间有一定距离，这类分子称为有极分子（如图 5.1(a)所示）。其电矩为

$$p_e = ql \quad (5-5)$$

式中， $l$ 的方向自负电荷中心指向正电荷中心， $l$ 与电偶极矩同方向，称为分子电矩；整块有极分子电介质，可以看成无数分子电矩的集合体。

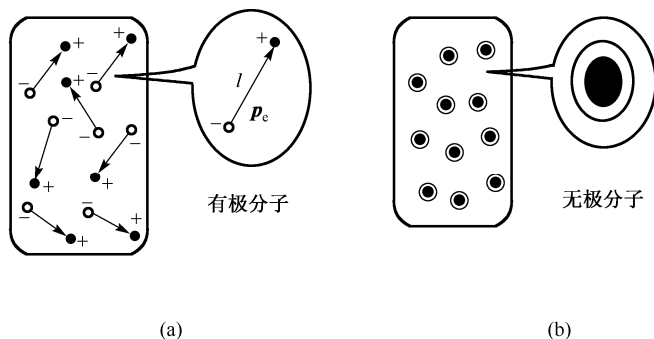


图 5.1 有极分子与无极分子示意图

另一类电介质, 如氦 (He)、氢 ( $\text{H}_2$ )、甲烷 ( $\text{CH}_4$ ) 等, 分子内正、负电荷中心是重合的, 因而  $l = 0$ , 故分子电矩  $|p_c| = 0$ 。这类分子称为无极分子。无极分子与整块的无极分子电介质如图 5.1(b) 所示。

### \*5. 电介质的极化及其描述

电介质不同于导体, 在理想电介质的分子、原子中, 正、负电荷束缚很紧, 没有可以自由运动的电荷, 所以理想电介质不导电, 是绝缘体。

① 电介质的极化: 在外电场的作用下, 均匀电介质的表面出现极化电荷 (也称为束缚电荷) 的现象。

② 极化强度与电场强度的关系: 实验证明, 在电介质中的电场强度不是特别强的情况下, 其极化强度  $\mathbf{P}$  的大小与电场强度  $\mathbf{E}$  的大小成正比, 方向与  $\mathbf{E}$  的方向相同, 其关系式可以写为

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) \mathbf{E} \quad (5-6)$$

③ 极化强度与极化面电荷密度的关系为

$$\sigma' = \frac{dq'}{dS} = P \cos \theta = P_n = \mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_n \quad (5-7)$$

式中,  $\sigma'$  为极化介质表面某处极化面电荷密度,  $dq'$  为该处面元  $dS$  上的极化电荷,  $\theta$  为极化强度  $\mathbf{P}$  与介质表面法向单位矢量  $\mathbf{e}_n$  间的夹角。上式表明极化介质表面某处极化面电荷密度  $\sigma'$  的大小与该处极化强度  $\mathbf{P}$  在表面法向上的分量值相等。

显然, 当  $0 \leq \theta \leq 90^\circ$  时, 表面上呈正极化电荷; 当  $90^\circ < \theta \leq 180^\circ$  时, 表面上呈负极化电荷; 而在  $\theta = 90^\circ$  的那些介质表面, 则无极化电荷出现。

### \*6. 有电介质存在时的电场

① 当电场中存在电介质时, 通常用  $q_0$  表示产生外电场的源电荷, 称为自由电荷, 介

质上的极化电荷则用  $q'$  表示。电介质在外电场中发生极化且达到稳定之后,  $q_0$  和  $q'$  在空间的分布将保持恒定, 这时空间任一点的电场强度  $\mathbf{E}$  应是自由电荷  $q_0$  产生的电场  $\mathbf{E}_0$  和极化电荷  $q'$  产生的附加电场  $\mathbf{E}'$  的矢量和, 即

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}' \quad (5-8)$$

实验证明, 对于各向同性材料, 在  $\mathbf{E}_0$  不太强的情况下,  $\mathbf{P}$  与  $\mathbf{E}$  成正比, 即

$$\mathbf{P} = \chi_e \varepsilon_0 \mathbf{E} \quad (5-9)$$

式中  $\chi_e$  为一纯数, 称为介质的极化率。它与介质的相对介电常数之间的关系为

$$\varepsilon_r = 1 + \chi_e$$

② 电介质中的高斯定理表示为

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \sum q_{0in} \quad (5-10)$$

此式说明, 通过任意封闭曲面的电位移通量等于该封闭曲面包围的自由电荷的代数和  $\sum q_{0in}$ , 称为介质中的高斯定理。它是存在介质情况下的普遍关系式。

## 7. 电容、电场的能量

### (1) 电容器的电容

电容器的电容定义为

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{Q}{U} \quad (5-11)$$

式中,  $U = V_1 - V_2$  为电容器两极板的电势差,  $Q$  为一个极板所带电荷量的数值, 其中一个带正电, 另一个带负电。电容器的主要特点是: 当电容器的两极分别带有等量而异号的电荷时, 电场集中在两个极之间的空间, 如同心球壳的组成的电容器, 其电场在两个球壳之间的空间。两“无限大”平行板电容器的电场在两平行平板之间, 等等。一般情况, 电容器两极板间的距离远小于电容器本身的尺寸, 因而通常在这种情况下可忽略边缘效应。对于由给定导体组和电介质构成的电容器, 其电容的值是确定的, 只取决于导体组的几何形状和电介质的电容率。

### (2) 几种特殊形状导体组电容器的电容

① 孤立导体。在真空中, 一个带有电量  $Q$  的孤立导体, 其电势为  $U$ 。实验表明, 当电量  $Q$  增加时, 导体的电势也增加, 而电量  $Q$  与电势  $U$  的比值却保持不变; 对于形状和大小不同的导体要达到相同的电势, 它们所带的电量是不同的。由此可见, 孤立导体的电量与电势的比值只决定于导体的形状和大小, 称此比值为该孤立导体的电容  $C$ , 即

$$C = \frac{Q}{U} \quad (5-12)$$



例如, 真空中半径为  $R$  的孤立导体球, 其电容为

$$C = \frac{Q}{Q/4\pi\epsilon_0 R} = 4\pi\epsilon_0 R$$

可见, 孤立导体球的电容正比于球的半径, 与所带电量无关。下面考虑电容器的电容。

② 平板电容器。平板电容器是由大小相同的两块平行金属板组成的。用  $S$  表示两平行金属板相对着的表面积,  $d$  表示两板之间的距离, 设两板间充满了相对介电常数为  $\epsilon_r$  的电介质。现假设两板上相对的两个表面分别带有  $+Q$  和  $-Q$  的电荷。忽略边缘效应, 它的两板间的电场

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon_r S}$$

两板间的电压差为

$$V = Ed = \frac{Qd}{\epsilon_0 \epsilon_r S}$$

所以平行板电容器的电容为

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{d} \quad (5-13)$$

在实用上, 常通过改变极板相对面积的大小或改变极板间距离的方法, 来改变电容器的电容。还可以改变极板间电介质的种类来改变电容, 从式 (5-13) 可以看出, 板间充满电介质时的电容比板间为真空 ( $\epsilon_r = 1$ ) 时的电容大  $\epsilon_r$  倍。

③ 圆柱形电容器。圆柱形电容器由两个长直同轴的金属圆筒组成, 如图 5.2 所示。设筒的长度为  $l$ , 两筒的半径分别  $R_1$  和  $R_2$ , 两筒之间充满相对介电常数为  $\epsilon_r$  的电介质。为了求出圆柱形电容器的电容, 假设外筒单位长度带电荷  $-\lambda$ , 内筒单位长度带电荷  $+\lambda$ 。忽略两端的边缘效应, 两筒间距离轴线为  $r$  处的电场强度为

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r r}$$

场强的方向垂直于轴线而沿径向, 由此可以求出两圆筒间的电压为

$$V = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r r} dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

所以圆柱形电容器的电容为

$$C = \frac{\lambda L}{V} = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r L}{\ln(R_2/R_1)} \quad (5-14)$$

④ 球形电容器。球形电容器是由两个同心的导体球壳组成，两球壳间充满相对介电常数为  $\varepsilon_r$  的电介质，半径分别为  $R_1$  和  $R_2$ ，如图 5.3 所示。假设两球壳的相对的两表面分别带电荷  $+Q$  和  $-Q$ ，则两球壳间的电势差为

$$V = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \left( \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \right)$$

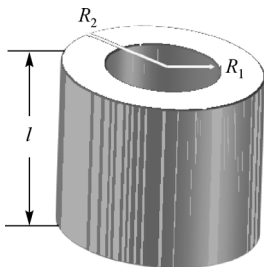


图 5.2 圆柱形电容器

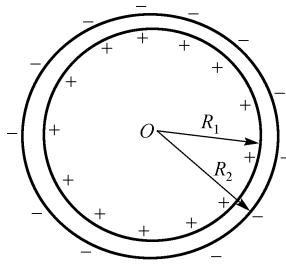


图 5.3 球形电容器

所以球形电容器的电容为

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R_1 R_2}{R_2 - R_1} \quad (5-15)$$

### (3) 电容器的串联与并联

电容和耐压是电容器的两个主要性能指标，当单个电容器不能满足要求时，就可用串联或并联的方法来解决。

① 电容器串联时，各电容器上所带的电量相等，而串联电容器组的总电量就等于各电容器的电量，总电压等于各个电容器的电压之和，即

$$\frac{q}{C} = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} + \dots$$

串联电容器组的总电容为

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots \quad (5-16)$$

② 电容器并联时，各电容器的电压相等，而并联电容器组所带的总电量为各个电容器所带的电量之和，即

$$CV = C_1V + C_2V + \dots$$

并联电容器组的总电容为

$$C = C_1 + C_2 + \dots \quad (5-17)$$

并联与串联相比, 并联时总电容增大了, 但因每个电容器都直接接到电压源上, 所以电容器组的耐压受到耐压值最低的电容器的限制。串联时, 总电容比每个电容器的电容都小, 但由于总电压分配到各个电容器上, 所以电容器组的耐压提高了。

#### (4) 电场的能量

电容器的储能公式为

$$W_e = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} QU \quad (5-18)$$

电容器的充电过程也是电容器极板间的电场的建立过程。事实已证明能量是储存在电容器的两极板间的电场中的。

考虑到能量是储存在电场中的, 于是得到电场的能量密度 (即单位体积内储存的电能) 公式为

$$w_e = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 = \frac{1}{2} ED \quad (5-19)$$

它是计算电场能量密度的普遍公式, 不论是均匀电场、非均匀电场、静电场还是变化电场, 都适用。对于非均匀电场,  $w_e$  应为空间坐标的函数, 于是电场的能量为

$$W_e = \int w_e dV = \int \frac{1}{2} \varepsilon E^2 dV \quad (5-20)$$

积分应遍及电场所在的整个空间。

## 5.3 重点难点分析

### 1. 本章重点

本章重点是在理解静电平衡下导体的场强、电势和电荷分布特征等概念的基础上, 掌握并学会分析导体在静电场中的电荷分布和电场、电势的分布; 能够正确理解电介质在静电场中的极化现象及电介质对静电场的影响; 并能通过对电介质中电场的分析, 得出电介质中的高斯定理; 能够熟练地计算一些简单的常见物体的电容, 以及计算电场的能量。

### 2. 本章难点

本章难点在于分析、判断和计算带电导体或由导体组成的导体系的电场强度和电势分布。明晰导体平衡条件及导体处于静电平衡时的性质及概念, 如静电平衡时导体内部电场强度为零, 电势并不一定为零。接地导体电势为零, 但电荷不一定为零等性质。这些性质很容易混淆而产生判断错误。解决的方法: 一是准确判断静电平衡时电荷的分布; 二是正确应用场强 (电场、电势) 叠加原理及高斯定理; 三是要熟练掌握电场强度、电势的计算方法和步骤。

本章知识是以第4章知识为基础的,是第4章知识的应用和推广。因此,要注意对已学知识的复习。

## 5.4 精选例题分析

**例 5-1** 有一块大金属板,面积为  $S$ , 带有总电量  $Q$ , 现在其近旁平行地放置第二块大金属平板, 此板原来不带电。(1) 求静电平衡时, 金属板上的电荷分布及周围空间的电场分布; (2) 如果把第二块金属板接地, 最后情况又如何(忽略金属板的边缘效应)?

**分析:** (1) 由于静电平衡下导体内部无净电荷, 所以电荷只能分布在两金属板的四个表面上。不考虑边缘效应, 这些电荷可以看作是均匀分布的。设四个表面上的面电荷密度分别为  $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$ 、 $\sigma_3$  和  $\sigma_4$ , 如图 5.4 所示。

**解:** 由电荷守恒定律可知

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \frac{Q}{S} \quad (1)$$

$$\sigma_3 + \sigma_4 = 0 \quad (2)$$

由于板间电场与板面垂直, 且板内的电场为零, 所以选一个两底分别在两个金属板内而侧面垂直于板面的封闭面作为高斯面, 则通过此高斯面的电通量为零。根据高斯定理可得

$$\sigma_2 + \sigma_3 = 0 \quad (3)$$

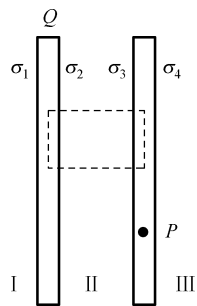


图 5.4 例 5-1 解图

在金属板内任一点  $P$  的场强应该是四个带电面的电场的叠加, 且等于零, 因而有

$$E_P = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0} = 0$$

即

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 - \sigma_4 = 0 \quad (4)$$

联立求解式(1)~式(4)可得

$$\sigma_1 = \frac{Q}{2S}, \quad \sigma_2 = \frac{Q}{2S}, \quad \sigma_3 = -\frac{Q}{2S}, \quad \sigma_4 = \frac{Q}{2S}$$

各区间电场分布如下:

$$\text{在 I 区, } E_I = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S}, \text{ 方向向左; 在 II 区, } E_{II} = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S}, \text{ 方向向右; 在 III 区, } E_{III} = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S},$$

方向向右。

(2) 如果把第二块金属板接地, 它就与地球这个大导体连成一体。这块金属板右表

面上的电荷就会分散到更远的地球表面上而使得金属板右表面上的电荷由于中和而消失, 因而

$$\sigma_4 = 0 \quad (5)$$

对于第一块金属板, 由于电荷守恒, 因此有

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \frac{Q}{S} \quad (6)$$

由高斯定理仍可得

$$\sigma_2 + \sigma_3 = 0 \quad (7)$$

为了使得金属板内点的电场为零, 必须有

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0 \quad (8)$$

由式(5)~式(8)得出

$$\sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = \frac{Q}{S}, \quad \sigma_3 = -\frac{Q}{S}, \quad \sigma_4 = 0$$

与未接地前相比, 电荷分布改变了。这时电场分布可根据上面求得的电荷分布求出, 即

$$E_I = 0, \quad E_{II} = \frac{Q}{\epsilon_0 S} \quad \text{向右}, \quad E_{III} = 0$$

**例 5-2** 一个半径为  $R_1$  的金属球  $A$  带电  $q$ , 在它外面有一同心金属球壳  $B$ , 其内外半径分别为  $R_2$  和  $R_3$ , 如图 5.5 所示, 球壳带电  $Q$ , 两球距地面很远。

(1) 若球壳  $B$  通过导线同较远的地面相接, 然后再断开, 求  $B$  球壳上的电荷分布和电势,  $A$  球的电势以及  $P$  点 ( $r < r_p < R_1$ ) 的电势;

(2) 再使  $A$  球通过导线经  $B$  壳上的小孔接地, 求  $A$ 、 $B$  上的电荷分布和电势 (小孔的影响可忽略)。

**解:** (1) 球壳接地前, 电荷  $q$  均匀分布在半径为  $R_1$  的球面上, 而球壳内表面应带电  $-q$ , 球壳外表面带电  $Q+q$ 。球壳接地时有

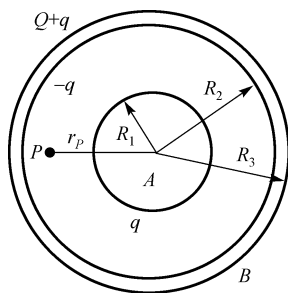


图 5.5 例 5-2 图

$$U_B = 0$$

这时  $A$  球仍带电  $q$ ,  $B$  壳内表面带电  $-q$ , 但外表面上的电荷不再等于  $Q+q$ , 先设为  $Q'$ 。考虑到球壳  $B$  距地面较远, 其表面上的电荷近似为均匀分布, 所以

$$U_B = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{Q'}{4\pi\epsilon_0 R_3} = \frac{Q'}{4\pi\epsilon_0 R_3} = 0$$

由此可得  $Q' = 0$ ，即  $B$  球壳接地，其外表面上无电荷。

而  $A$  球的电势

$$U_A = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

$A$ 、 $B$  间  $P$  点的电势

$$U_P = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_P} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 R_1}$$

(2)  $A$  球接地时有  $U_A = 0$ 。 $A$  球原带电  $q$ ，设接地后改变为  $q'$ ，而  $B$  壳内表面原带电  $-q$ ，也相应地改变为  $-q'$ ，其外表面所带电量应为  $-q + q'$ 。根据  $A$  球的电势

$$U_A = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{-q'}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{-q + q'}{4\pi\epsilon_0 R_3} = 0$$

从而求得

$$q' = \frac{qR_1R_2}{R_1R_2 - R_1R_3 + R_2R_3}$$

而

$$U_B = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{-q'}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{-q + q'}{4\pi\epsilon_0 R_3} = \frac{-q + q'}{4\pi\epsilon_0 R_3}$$

**例 5-3** 一带正电荷  $q_0$ ，半径为  $R_1$  的金属球，被一内外半径分别为  $R_1$  和  $R_2$  ( $R_1 < R_2$ ) 的均匀电介质同心球壳包围，已知电介质的相对介电常数为  $\epsilon_r$ ，介质球壳外为真空。求(1)空间的电场分布；(2)球心电势；(3)电介质球壳内表面上的极化电荷总量。

**解：**(1) 由于自由电荷  $q_0$  的分布和电介质的分布都是球对称的， $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{D}$  的分布也具有球对称性。作一半径为  $r$  的球面，通过此球面的  $\mathbf{D}$  通量是

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D \cdot 4\pi r^2$$

当  $r < R_1$  时， $\sum q_{\text{in}} = 0$ ，由高斯定理得

$$D_1 \cdot 4\pi r^2 = 0$$

$$D_1 = 0, \quad E_1 = 0$$

当  $R_1 < r < R_2$  时， $\sum q_{\text{in}} = q_0$ ，由电介质中的高斯定理可得

$$D_2 \cdot 4\pi r^2 = q_0$$

$$D_2 = \frac{q_0}{4\pi r^2}, \quad E_2 = \frac{D_2}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{q_0}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r r^2}$$

当  $r < R_2$  时,  $\sum q_{\text{in}} = q_0$ , 所以

$$D_3 \cdot 4\pi r^2 = q_0$$

于是

$$D_3 = \frac{q_0}{4\pi r^2}, \quad E_3 = \frac{D_3}{\varepsilon_0} = \frac{q_0}{4\pi \varepsilon_0 r^2}$$

(2) 取无穷远处为零电势点, 则球心电势可由定义式求得

$$\begin{aligned} U_0 &= \int_0^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^{R_1} E_1 dr + \int_{R_1}^{R_2} E_2 dr + \int_{R_2}^\infty E_3 dr \\ &= \frac{q_0}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{q_0}{4\pi \varepsilon_0 R_2} \end{aligned}$$

(3) 根据  $\sigma' = \frac{dq'}{dS} = P \cos \theta = P_n = \mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_n$ , 电介质球壳内表面的极化电荷面密度为

$$\sigma' = P \cos \theta = -P$$

而电介质球壳内表面处的极化强度

$$P = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) E_2 = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) \frac{q_0}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r R_1^2}$$

所以电介质球壳内表面的极化电荷总量为

$$q' = \sigma' \cdot 4\pi R_1^2 = \left( \frac{1}{\varepsilon_r} - 1 \right) q_0$$

由于  $\varepsilon_r > 1$ , 所以  $q'$  与  $q_0$  反号, 而数值小于  $q_0$ 。

**例 5-4** 半径分别为  $R_1$  和  $R_3$  的两同轴直圆筒构成一柱形电容器, 圆筒长为  $L$ , 两极板间充满相对电容率分别为  $\varepsilon_{r1}$  和  $\varepsilon_{r2}$  的两层电介质, 且它们的分界面为一半径为  $R_2$  ( $R_1 < R_2 < R_3$ ) 的圆柱面, 设  $R_3 - R_1 \ll L$ 。求此电容器带电量为  $Q$  时所储存的电。

**解:** 电容器两极板间的电场具有轴对称性, 运用介质中的高斯定理可求出

$$D = \frac{Q}{2\pi r L}$$

$R_1 < r < R_2$  时,

$$E_1 = \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1}} = \frac{Q}{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_{r1} r L}$$

$R_2 < r < R_3$  时,

$$E_2 = \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r2}} = \frac{Q}{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_{r2} r L}$$

根据前面介绍的  $w_e = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 = \frac{1}{2} ED$ , 可求出各区域的电场能量密度如下:

$R_1 < r < R_2$  时,

$$w_{e1} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_{r1} E_1^2$$

$R_2 < r < R_3$  时,

$$w_{e2} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_{r2} E_2^2$$

在电容器两极板间取一半径为  $r$ 、厚度为  $dr$  的同轴圆柱薄筒, 其所储存的能量为

$$dW_e = w_e dV = w_e \cdot 2\pi r L dr$$

电容器中全部电场空间所储存的能量为

$$\begin{aligned} W_e &= \int dW_e = \int_{R_1}^{R_2} w_{e1} \cdot 2\pi r L dr + \int_{R_2}^{R_3} w_{e2} \cdot 2\pi r L dr \\ &= \frac{Q^2}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_{r1} L} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} + \frac{Q^2}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_{r2} L} \int_{R_2}^{R_3} \frac{dr}{r} \\ &= \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 L} \left( \frac{1}{\varepsilon_{r1}} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{\varepsilon_{r2}} \ln \frac{R_3}{R_2} \right) \end{aligned}$$

此题还可以先求出电容器的电容  $C$ , 然后利用公式  $W_e = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} Q U$  计算电容器的储能。

## 5.5 习题

5.1 半径分别为 1.0cm 与 2.0cm 的两个球形导体, 各带电荷  $1 \times 10^{-8} \text{ C}$ , 两球相距很远。若用细导线将两球相连接。求:



(1) 每个球所带电荷;

(2) 每球的电势。(  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$  )

5.2 如图 5.6 所示, 一内半径为  $a$ 、外半径为  $b$  的金属球壳, 带有电荷  $Q$ , 在球壳空腔内距离球心  $r$  处有一点电荷  $q$ 。设无限远处为电势零点, 试求:

(1) 球壳内外表面上的电荷;

(2) 球心  $O$  点处, 由球壳内表面上电荷产生的电势;

(3) 球心  $O$  点处的总电势。

5.3 半径分别为  $R$  和  $r$  的两个导体球, 相距甚远。用细导线连接两球并使它们带电, 电荷面密度分别为  $\sigma_1$  和  $\sigma_2$ 。忽略两个导体球的静电相互作用和细导线上电荷对导体球上电荷分布的影响。

试证明:  $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{r}{R}$ 。

5.4 一圆柱形电容器, 外柱的直径为 4cm, 内柱的直径可以适当选择, 若其间充满各向同性的均匀电介质, 该介质的击穿电场强度的大小为  $E_0 = 200 \text{ kV/cm}$ 。试求该电容器可能承受的最高电压。(自然对数的底  $e = 2.7183$ )

5.5 一半径为  $a$  的“无限长”圆柱形导体, 单位长度带电荷为  $\lambda$ 。其外套一层各向同性均匀电介质, 其相对介电常数为  $\epsilon_r$ , 内、外半径分别为  $a$  和  $b$ 。试求电位移和场强的分布。

5.6 一半径为  $R$  的带电介质球体, 相对介电常数为  $\epsilon_r$ , 电荷体密度分布  $\rho = k/r$  ( $k$  为已知常量), 试求球体内、外的电位移和场强分布。

5.7 图 5.7 所示为一平行板电容器, 极板面积为  $S$ 。两极板间有两种各向同性均匀电介质板, 它们的相对介电常数分别为  $\epsilon_{r1}$  和  $\epsilon_{r2}$ 。已知极板上分别带有自由电荷  $+Q$  和  $-Q$ , 求两种介质板中的电极化强度的大小。

5.8 一半径为  $R$  的各向同性均匀电介质球体均匀带电, 其自由电荷体密度为  $\rho$ , 球体的介电常数为  $\epsilon_1$ , 球体外充满介电常数为  $\epsilon_2$  的各向同性均匀电介质。求球内外任一点的场强大小和电势 (设无穷远处为电势零点)。

5.9 半径为  $R$  的介质球, 相对介电常数为  $\epsilon_r$ 、其体电荷密度  $\rho = \rho_0(1 - r/R)$ , 式中  $\rho_0$  为常量,  $r$  是球心到球内某点的距离。试求:

(1) 介质球内的电位移和场强分布;

(2) 在半径  $r$  为多大处场强最大?

5.10 如图 5.8 所示, 一半径为  $R$  的导体球, 带有电荷  $Q$ , 在它外面同心地包一层各向同性的均匀电介质球壳, 其内外半径分别为  $a$  和  $b$ , 相对介电常数为  $\epsilon_r$ 。求电介质中的电极化强度  $P$  和介质表面上的束缚电荷面密度。

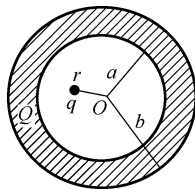


图 5.6 习题 5.2 图

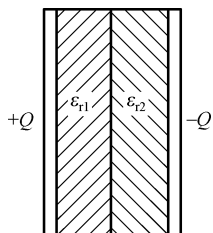


图 5.7 习题 5.7 图

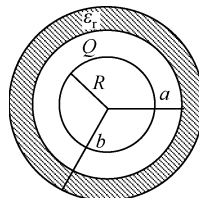


图 5.8 习题 5.10 图

5.11 两根平行“无限长”均匀带电直导线，相距为  $d$ ，导线半径都是  $R$  ( $R \ll d$ )。导线上电荷线密度分别为  $+\lambda$  和  $-\lambda$ 。试求该导体组单位长度的电容。

5.12 如图 5.9 所示，一电容器由两个同轴圆筒组成，内筒半径为  $a$ ，外筒半径为  $b$ ，筒长都是  $L$ ，中间充满相对介电常数为  $\epsilon_r$  的各向同性均匀电介质。内、外筒分别带有等量异号电荷  $+Q$  和  $-Q$ 。设  $(b-a) \ll a$ ， $L \gg b$ ，可以忽略边缘效应，求：

- (1) 圆柱形电容器的电容；
- (2) 电容器贮存的能量。

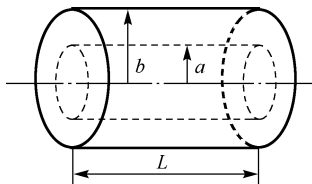


图 5.9 习题 5.12 图

## 第 6 章 稳恒磁场 恒定磁场中的磁介质

磁现象和电现象虽然早已被人们发现，但在很长时期内磁学和电学各自独立地发展着，直到 20 世纪 20 年代前后电与磁才联系起来。近代物理理论表明，一切磁现象起源于电荷的运动，电荷不论静止还是运动，在其周围空间都要激发电场，而运动的电荷在周围还要激发磁场；在磁场中，静止电荷只受到电场力作用，而运动电荷除受到电场力作用外，还受到磁力作用。电流或运动电荷之间相互作用的磁力是通过磁场作用的。

本章主要研究恒定磁场及其对运动电荷和电流的作用。从恒定电流产生条件、电流密度、电源及电动势等基本概念出发，讨论真空中的恒定磁场、磁感应强度、电流激发磁场的规律、磁场的基本性质等知识，以及毕奥-沙伐尔定律、高斯定理、安培环路定律、安培定律和磁感应强度叠加原理以及它们的简单计算。

在电磁感应部分内容，主要讨论感应电动势、动生电动势和感生电动势的概念及其本质；介绍涡旋电场、自感系数和互感系数的基本概念及其物理意义；最后讨论法拉第电磁感应定律和楞次定律及其用。

### 6.1 学习要求

(1) 理解恒定电流产生的条件，电流密度矢量、稳恒电场、电源及电动势等概念，理解电流连续性方程和电流稳恒的条件；

(2) 掌握磁感应强度的概念，理解毕奥-沙伐尔定律、高斯定理和安培环路定律、安培定律，并能结合磁感应强度叠加原理进行简单的计算，理解磁力矩、洛伦兹力公式及简单的应用；

(3) 理解和掌握计算磁场分布的几种方法，能根据霍尔效应判断半导体的类型；

(4) 了解磁介质磁化的微观机理及特征、磁化强度  $M$ 。理解磁场强度  $H$ ，理解并能运算磁介质中的安培环路定理计算介质中的磁场强度，并能由已知的磁场强度求相应的磁感应强度。

### 6.2 内容提要

#### 1. 基本概念

(1) 电流密度矢量：电流密度  $\mathbf{j}$  是一个矢量，其方向与该点正电荷的运动方向相同，大小等于流过垂直于电流方向的单位面积的电流，记为

$$j = \frac{dI}{dS_{\perp}} \quad (6-1)$$

(2) 稳恒电场：导体内各处的电流密度  $j$  都不随时间变化的电流叫做稳恒电流。在稳恒电流的情况下，虽然存在电荷的定向运动，但导体内的电荷分布和导体内、外的电场都不随时间变化，这样的电场称为稳恒电场。稳恒电场与静电场具有相同的性质，稳恒电场也遵守静电场的高斯定理和环路定理。

(3) 电源电动势：为了要形成稳恒电流，必须有一种本质上完全不同于静电性的力，能够不断地把流到负极板上的正电荷送回到正极板上，这样才能使两极板保持恒定的电势差，从而在导线中维持恒定的电流。能提供这种非静电力的装置称为电源。电荷  $q$  在电源中所受的非静电力，是一种非静电性电场作用的结果。用  $E_k$  来表示这一非静电性电场，而电源的电动势定义为

$$\varepsilon = \int_{-}^{+} E_k \cdot dI \quad (6-2)$$

其含义是将单位正电荷从电源的负极经电源内部移到电源正极的过程中非静电场力所做的功。

电动势是标量，但有方向。通常把电源内从负极指向正极的方向，即电势升高的方向，规定为电动势的方向。

在有些情况下非静电力存在于整个电流回路中，这时回路的总电动势应为

$$\varepsilon = \oint_L E_k \cdot dI \quad (6-3)$$

式中，线积分遍及整个电流回路  $L$ 。

(4) 电流的连续性方程

$$\oint_S j \cdot dS = -\frac{dq}{dt} \quad (6-4)$$

电流稳恒的条件：通过任一封闭曲面的稳恒电流必然为零。即

$$\oint_S j \cdot dS = 0 \quad (6-5)$$

稳恒电流的条件表明，流进一个封闭曲面的电流一定等于流出这个封闭曲面的电流，即稳恒电流是连续的。

(5) 磁力：物质磁性最直观的表现是两个磁体之间的吸引力或排斥力。磁体中受引力或排斥力最大的区域称为磁体的磁极，磁极之间的相互作用与静电荷之间的作用类似。迄今为止，所发现的磁体上都有两个自由磁极（磁南极和磁北极）。考虑强度为  $m_1$  和  $m_2$ ，距离为  $r$  的两个磁极，相互之间的作用力  $F$  为

$$F = \frac{m_1 m_2}{4\pi\mu_0 r^2} \quad (6-6)$$

其中,  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$  称为真空磁导率。

磁极之间能发生相互作用, 是由于在磁极(体)周围存在磁场。磁体周围分布的磁场可由磁力线表示, 这与电荷周围电场的分布用电力线表示类似。但注意: ① 磁力线总是从 N 极出发, 进入与其最近邻的 S 极, 并形成闭合回路; ② 磁力线总是沿磁导率最大的路径, 因此磁力线通常呈直线或曲线; ③ 任意两条同向磁力线相互排斥, 因此不存在相交的磁力线。

磁偶极子: 用无限小电流回路所表示的小磁体, 定义为磁偶极子。设磁偶极子的磁极强度为  $m$ , 磁极间距离为  $l$ , 则用  $\mathbf{j}_m = m\mathbf{l}$  来表示磁偶极子所具有的磁偶极矩。 $\mathbf{j}_m$  的方向为由 S 指向 N。

磁偶极子磁性的大小和方向可以用磁矩来表示。

(6) 磁矩  $\mathbf{p}_m$ : 定义为线圈中的电流  $i$  与线圈所包围的面积  $S$  的乘积。磁矩的方向与线圈的平面的法线方向相同。

$$\mathbf{p}_m = iS\mathbf{e}_n \quad (6-7)$$

式中,  $\mathbf{e}_n$  表示面元法线正方向的单位矢量, 电流元与  $\mathbf{e}_n$  之间遵从右手关系。

## 2. 恒定电流、电流密度和电动势

(1) 电流强度和电流密度: 如果在时间  $dt$  内, 通过导线某一横截面的电量为  $dq$ , 则通过该截面的电流强度

$$I = \frac{dq}{dt} \quad (6-8)$$

即电流强度  $I$  等于单位时间内通过导线横截面的电量。在国际单位制中, 电流强度的单位是安培 (A),  $1\text{A}=1\text{C/s}$ 。

流过任一有限面积  $S$  的电流强度为

$$I = \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} \quad (6-9)$$

(2) 欧姆定律的微分形式:  $\rho$  是导体材料的电阻率,  $\sigma = 1/\rho$  称为电导率

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \quad (6-10)$$

这就是欧姆定律的微分形式, 它描述了导体中各点的电流密度与电场强度的关系。

## 3. 毕奥-萨伐尔定律、磁感应强度叠加原理

(1) 磁感应强度  $\mathbf{B}$ : 描述磁场的强弱和方向的空间分布, 单位是特斯拉 (T)。定义磁感应强度矢量  $\mathbf{B}$  有多种方法。例如, 通过磁场对载流线圈有磁力矩  $\mathbf{M}$  的作用来定义。设线圈受到最大磁力矩为  $\mathbf{M}_{\max}$ , 则磁感应强度的大小为

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{M}_{\max}}{p_m} \quad (6-11)$$

磁感应强度的方向：试验线圈在该点处于平衡位置时  $\vec{e}_n$  的方向。还可通过引入磁场中的运动试探电荷、载流导体或永久磁体有磁场力的作用，即可用磁场对运动试探电荷的作用来描述磁场。设有一运动试探电荷  $+q_0$  以速率  $v$  进入恒定磁场中某  $P$  点时，通过实验发现，该电荷所受到的磁场力  $\mathbf{F}$  的大小是随电荷进入磁场的速度  $v$  的方向不同而不同，但所受磁场力的方向始终垂直于电荷运动的方向。规定：运动试探电荷  $+q_0$  通过  $P$  点不受磁场力的方向为该点处磁场的方向。实验还发现，当运动正电荷速度  $v$  的方向与磁感应强度  $\mathbf{B}$  的方向垂直时，所受到的磁场力具有最大值  $\mathbf{F}_{\max}$ ，这个最大磁场力正比于该试探电荷的大小，也正比于运动电荷的速率  $v$ ，但比值  $\mathbf{F}_{\max} / q_0 v$  却在该点具有确定的量值，而与运动试探电荷的  $q_0 v$  值的大小无关。因此，定义磁场中  $P$  点的磁感应强度  $\mathbf{B}$  的大小为

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{F}_{\max}}{q_0 v} \quad (6-12)$$

(2) 磁感应线（磁力线）：磁力线上每一点的切线方向与该点的磁感应强度  $\vec{B}$  的方向一致，通过某点垂直于磁场方向的单位面积上的磁力线条数等于该点  $\vec{B}$  的大小。磁力线有以下特点：①磁力线是无头无尾的闭合曲线（或两端伸向无穷远处），所以磁场是涡旋场；②磁力线与载流电路互相套合（即每条磁力线都围绕着载流导线）；③任两条磁力线都不相交。

磁通量：在磁场中，通过一给定曲面的磁力线的数目，称为通过该曲面的磁通量，表达式为

$$\Phi_m = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (6-13)$$

(3) 毕奥-萨伐尔定律：电流元在空间某点  $P$  产生的磁感应强度  $d\mathbf{B}$  的大小与电流元  $Idl$  的大小成正比，与电流元和电流元到  $P$  点的位矢  $r$  之间的夹角  $\theta$  的正弦成正比，与电流元到  $P$  点的距离  $r$  的二次方成反比，即

$$dB = k \frac{Idl \sin \theta}{r^2} \quad (6-14)$$

式中， $k = \frac{\mu_0}{4\pi}$  为比例系数，其中  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}$  为真空磁导率，于是磁感应强度写成矢量式为

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (6-15)$$

磁感应强度的方向：由右手螺旋法则确定， $d\mathbf{B}$  的方向沿  $d\mathbf{l} \times \mathbf{r}$  的方向，如图 6.1 所示。对于任意截流体，可根据磁感应强度的叠加有理化求得磁场中任意点的磁感应强度  $\mathbf{B}$ 。

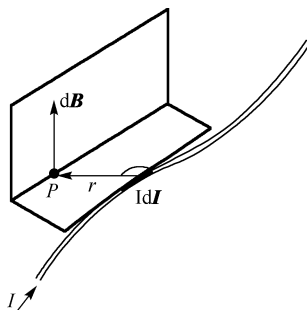


图 6.1 电流元所激发的磁感应强度的方向

(4) 磁感应强度叠加原理：电流元系产生的磁场中某点的磁感应强度等于各个电流元单独存在时，在该点产生的磁感应强度的矢量和，这一结论称为磁感应强度叠加原理，其数学形式为

$$\mathbf{B} = \sum_{j \neq i}^n \mathbf{B}_j \quad (6-16a)$$

或

$$\mathbf{B} = \int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (6-16b)$$

求载流导体的磁感应强度  $B$  的基本思想是：化整为零，集零为整。

#### 4. 恒定磁场的高斯定理和安培环路定理

(1) 高斯定理：由于磁力线是闭合曲线，因此通过任一闭合曲面磁通量的代数和（净通量）必为零。

$$\oint_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (6-17)$$

(2) 安培环路定理：在稳恒电流的磁场中，磁感应强度沿任意闭合路径的环路积分，等于这个闭合路径所包围的电流的代数和与真空磁导率的乘积。

$$\int_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum I_{in} \quad (6-18)$$

磁感应强度的环流完全由闭合路径  $l$  所包围的电流确定，而与未包围的电流无关。

#### 5. 安培定律、洛伦兹力

(1) 安培定律：放在磁场中某点处的电流元  $Idl$ ，受到的磁场力为

$$d\mathbf{F} = Id\mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad (6-19)$$

$\mathbf{B}$  为电流元所在处的磁感应强度,  $d\mathbf{F}$  称为安培力, 它的方向垂直于电流元  $I d\mathbf{l}$  和磁感应强度  $\mathbf{B}$  组成的平面, 与  $I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$  方向一致。式 (6-11) 称为安培定律。

(2) 洛仑兹力: 一个电荷  $q$  在磁场  $\mathbf{B}$  中以速度  $\mathbf{v}$  运动时, 该电荷所受的磁场力 (也称为洛仑兹力) 为

$$\mathbf{f} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (6-20)$$

一个运动电荷产生的磁场是

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{q\mathbf{v} \times \mathbf{e}_r}{r^2} \quad (6-21)$$

洛仑兹力的大小:

$$f = qvB \sin \theta \quad (6-22)$$

式中,  $\theta$  为电荷的运动方向与所在点磁场  $\mathbf{B}$  的方向之间的夹角。洛仑兹力  $\mathbf{f}$  的方向垂直于  $\mathbf{v}$  和  $\mathbf{B}$  组成的平面: 若  $q > 0$ , 则  $\mathbf{f}$  的方向与  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  的方向相同; 若  $q < 0$ , 则  $\mathbf{f}$  的方向与  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  的方向相反。

霍耳效应: 将导体板放在磁场中, 通入电流在导体板两侧将产生电势差为

$$V_H = \frac{1}{ne} \cdot \frac{IB}{b} \quad (6-23)$$

式中,  $V_H$  称为霍耳电势差,  $b$  为导体在磁场方向的厚度。霍耳效应不只在金属导体中产生, 在半导体和导电流体 (如等离子体) 中也会产生。

## 6. 恒定磁场中的磁介质

(1) 磁介质、磁化: 在磁场中有实物物质存在, 则磁场和实物之间的相互作用使得实物物质的分子状态发生变化, 从而激起附加磁场而改变原来磁场的分布。这种在磁场作用下, 其内部状态发生变化, 并反过来影响磁场分布的物质, 称为磁介质。磁介质在磁场作用下内部状态的变化叫做磁化。

(2) 磁化强度: 单位体积内分子磁矩的矢量和, 表达式为

$$\mathbf{M} = \frac{\sum \mathbf{p}_{mi}}{\Delta V} \quad (6-24)$$

(3) 磁场强度矢量的定义:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \quad (6-25)$$

在国际单位制中, 磁场强度的单位为安/米 (A/m)。



## 7. 有磁介质存在时的磁场

(1) 磁化电流: 磁介质在受到磁场作用时, 在磁介质横截面边缘处, 分子电流未被抵消, 形成与横截面边缘重合的一层圆电流。这种电流叫做磁化电流 (又称束缚电流)。

磁介质的磁化: 在外磁场的作用下, 均匀磁介质的表面上出现磁化电流的现象。

(2) 磁介质中的安培环路定理: 磁场强度  $H$  的环流 (沿任一闭合路径  $l$  的线积分) 等于该闭合路径  $l$  所包围的传导电流的代数和。令  $1 + \chi_m = \mu_r$  为相对磁导率, 而  $\mu_0 \mu_r = \mu$  称为磁导率, 则

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} = \mu \mathbf{H} \quad (6-26)$$

## 8. 磁介质及其分类

(1) 磁介质: 在考虑物质与磁场的相互影响时, 把所有的物质都称为磁介质。在磁场中, 磁介质磁化后, 在均匀磁介质表面出现磁化电流, 于是磁介质中的磁场为

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}' = \mu_r \mathbf{B}_0 \quad (6-27)$$

式中,  $\mathbf{B}_0$  为传导电流产生的外磁场,  $\mathbf{B}'$  为磁化电流产生的磁场,  $\mu_r$  为磁介质的相对磁导率, 它随磁介质的种类和状态的不同而不同 (对于真空,  $\mu_r = 1$ )。

(2) 磁介质可分为以下三类:

抗磁质——相对磁导率  $\mu_r$  略小于 1 的磁介质。

顺磁质——相对磁导率  $\mu_r$  略大于 1 的磁介质。

铁磁质——相对磁导率  $\mu_r \gg 1$ , 而且还随外磁场的大小发生变化的磁介质。

## 6.3 重点难点分析

### 1. 本章重点

掌握电流密度矢量、磁感应强度、磁通量、磁化强度、磁场强度矢量等基本概念; 熟练应用毕奥-沙伐尔定律、高斯定理、安培环路定律及安培定律, 并能结合磁感应强度叠加原理进行简单的计算, 理解磁力矩、洛仑兹力公式及其简单的应用; 能运用介质中的安培环路定理计算介质中的磁场强度, 并由此计算出相应的磁感应强度。

### 2. 本章难点

对电流密度矢量、磁化强度概念的理解; 对磁感应强度的矢量叠加的应用, 特别是对连续的电流分布问题的解决方法也是利用微元法来处理, 即将复杂的连续的电流分布分解为若干个或无数个典型的载流单元或微元。那么场点处的磁感应强度等于这些典型载流单元或微元在该点处产生的磁感应强度的矢量和或积分 (注意: 对矢量积分时一般是将其化

为沿某坐标轴的积分,如直角坐标轴上的积分)。在选择载流单元或微元时,特别注意电流元  $I d\mathbf{l}$  产生的  $d\mathbf{B}$  的方向。

另外磁聚焦现象、磁镜效应、霍耳效应、磁力矩  $\mathbf{M} = \mathbf{p}_m \times \mathbf{B}$  等概念较难理解。

## 6.4 精选例题分析

**例 6-1** 如图 6.2 所示的弓形线框中通有电流  $I$ , 求圆心  $O$  处的磁感应强度  $\mathbf{B}$ 。

**解:** 圆弧在  $O$  点的磁感应强度:  $B_1 = \frac{\mu_0 I \theta}{4\pi R} = \frac{\mu_0 I}{6R}$ , 方向: 垂直弓形线框平面向外。

直导线在  $O$  点的磁感应强度:  $B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R \cos 60^\circ} [\sin 60^\circ - \sin(-60^\circ)] = \frac{\sqrt{3}\mu_0 I}{2\pi R}$ , 方向为垂直纸面向里“ $\otimes$ ”。

所以, 总场强为

$$B = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0 I}{2R} \left( \frac{\sqrt{3}}{\pi} - \frac{1}{3} \right), \text{ 方向为垂直纸面向里“} \otimes \text{”}。$$

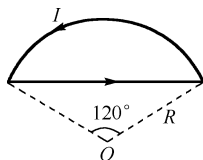


图 6.2 例 6-1 图

**例 6-2** 如图 6.3 所示, 两个半径均为  $R$  的线圈平行共轴放置, 其圆心  $O_1$ 、 $O_2$  相距  $a$ , 在两线圈中通电流强度均为  $I$  的同方向电流。

(1) 以  $O_1 O_2$  连线的中点  $O$  为原点, 求轴线上坐标为  $x$  的任意点的磁感应强度大小;

(2) 试证明: 当  $a = R$  时,  $O$  点处的磁场最为均匀。

**解:** (1) 设  $x$  轴上任意位置为  $P$  点, 由载流圆线圈轴线上的磁感应强度公式得

$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

左线圈在  $x$  轴  $P$  点产生的磁感应强度为

$$B_{P1} = \frac{\mu_0 I R^2}{2 \left[ R^2 + \left( \frac{a}{2} + x \right)^2 \right]^{3/2}}$$

右线圈在  $x$  轴  $P$  点产生的磁感应强度为

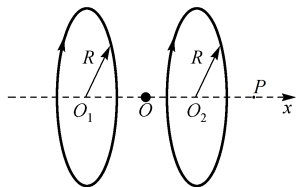


图 6.3 例 6-2 图

$$B_{P2} = \frac{\mu_0 I R^2}{2 \left[ R^2 + \left( \frac{a}{2} - x \right)^2 \right]^{3/2}}$$

$B_{P1}$  和  $B_{P2}$  方向一致, 均沿轴线水平向右, 所以  $P$  点磁感应强度为

$$B_P = B_{P1} + B_{P2} = \frac{\mu_0 I R^2}{2} \left\{ \left[ R^2 + \left( x + \frac{a}{2} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}} + \left[ R^2 + \left( x - \frac{a}{2} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}} \right\}$$

(2) 因为  $B_P$  随  $x$  变化, 变化率为  $\frac{dB}{dx}$ , 若此变化率在  $x=0$  处的变化最缓慢, 则  $O$  点处的磁场最为均匀, 下面讨论  $O$  点附近磁感应强度随  $x$  变化情况, 即对  $B_P$  的各阶导数进行讨论。

对  $B$  求一阶导数:

$$\frac{dB}{dx} = -\frac{3\mu_0 I R^2}{2} \left\{ \left( x + \frac{a}{2} \right) \left[ R^2 + \left( x + \frac{a}{2} \right)^2 \right]^{-\frac{5}{2}} + \left( x - \frac{a}{2} \right) \left[ R^2 + \left( x - \frac{a}{2} \right)^2 \right]^{-\frac{5}{2}} \right\}$$

当  $x=0$  时,  $\frac{dB}{dx}=0$ , 可见在  $O$  点, 磁感应强度  $B$  有极值。

对  $B$  求二阶导数:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{dB}{dx} \right) = \frac{d^2 B}{dx^2} = -\frac{3\mu_0 I R^2}{2} \left\{ \frac{1}{\left[ R^2 + \left( x + \frac{a}{2} \right)^2 \right]^{\frac{5}{2}}} - \frac{5 \left( x + \frac{a}{2} \right)^2}{\left[ R^2 + \left( x + \frac{a}{2} \right)^2 \right]^{\frac{7}{2}}} + \frac{1}{\left[ R^2 + \left( x - \frac{a}{2} \right)^2 \right]^{\frac{5}{2}}} - \frac{5 \left( x - \frac{a}{2} \right)^2}{\left[ R^2 + \left( x - \frac{a}{2} \right)^2 \right]^{\frac{7}{2}}} \right\}$$

当  $x=0$  时, 二阶导数为  $\frac{d^2 B}{dx^2} \Big|_{x=0} = 3\mu_0 I R^2 \frac{a^2 - R^2}{\left[ R^2 + \left( \frac{a}{2} \right)^2 \right]^{\frac{7}{2}}}$ , 由此可得如下结论:

当  $a > R$  时,  $\frac{d^2 B}{dx^2} \Big|_{x=0} > 0$ , 即在  $O$  点的磁感应强度  $B$  有极小值;

当  $a < R$  时,  $\frac{d^2 B}{dx^2}|_{x=0} < 0$ ,  $O$  点的磁感应强度  $B$  有极大值;

当  $a = R$  时,  $\frac{d^2 B}{dx^2}|_{x=0} = 0$ , 说明磁感应强度  $B$  在  $O$  点附近的磁场是相当均匀的, 可看成匀强磁场。

利用此结论, 一般在实验室中, 用两个同轴、平行放置的  $N$  匝线圈 (相对距离等于线圈半径), 通电后两线圈之间产生一个近似均匀的磁场, 比用长直螺线管获取均匀磁场更方便, 这样的线圈叫亥姆霍兹线圈。

**例 6-3** 无限长直线电流  $I_1$  与直线电流  $I_2$  共面, 几何位置如图 6.4 所示, 试求直线电流  $I_2$  受到电流  $I_1$  磁场的作用力。

**解:** 在直线电流  $I_2$  上任意取一个小电流元  $I_2 dl$ , 此电流元到长直线的距离为  $x$ , 无限长直线电流  $I_1$  在小电流元处产生的磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}$$

再利用  $dF = IBdl$ , 考虑到  $dl = \frac{dx}{\cos 60^\circ}$ , 有

$$dF = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi x} \cdot \frac{dx}{\cos 60^\circ}$$

所以

$$F = \int_a^b \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi x} \cdot \frac{dx}{\cos 60^\circ} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{\pi} \ln \frac{b}{a}$$

**例 6-4** 如图 6.5 所示, 一个带有电荷  $q$  ( $q > 0$ ) 的粒子, 以速度  $v$  平行于均匀带电的长直导线运动, 该导线的线电荷密度为  $\lambda$  ( $\lambda > 0$ ), 并载有传导电流  $I$ 。试问粒子要以多大的速度运动, 才能使其保持在一条与导线距离为  $d$  的平行线上?

**解:** 由安培环路定律  $\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$  知, 电流  $I$  在  $q$  处产生的磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}$$

方向垂直纸面向里 “ $\otimes$ ”。

运动电荷  $q$  受到的洛伦兹力方向向左, 大小为

$$F_{\text{洛}} = qvB = \frac{qv\mu_0 I}{2\pi d}$$

同时由于导线的线电荷密度为  $\lambda$ , 在  $q$  处产生的电场强度可用高斯定律求得

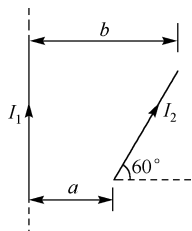


图 6.4 例 6-3 图

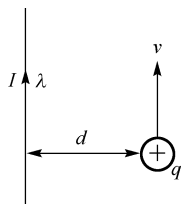


图 6.5 例 6-4 图

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 d}$$

$q$  受到的静电力方向向右, 大小为

$$F_{\text{电}} = \frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0 d}$$

欲使粒子保持在一条与导线距离为  $d$  的平行线上, 须  $F_{\text{洛}} = F_{\text{电}}$ , 即

$$\frac{qv\mu_0 I}{2\pi d} = \frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0 d}$$

可得

$$v = \frac{\lambda}{\mu_0 \epsilon_0 I}$$

**例 6-5** 截面积为  $S$ 、密度为  $\rho$  的铜导线被弯成正方形的三边, 可以绕水平轴  $OO'$  转动, 如图 6.6 所示。导线放在方向竖直向上的匀强磁场中, 当导线中的电流为  $I$  时, 导线离开原来的竖直位置偏转一个角度  $\theta$  而平衡, 求磁感应强度。

**解:** 设正方形导线的边长为  $a$ , 质量为  $m$  ( $m = \rho a S$ ), 平衡时重力矩等于磁力矩。由于

$$\mathbf{M} = \mathbf{p}_m \times \mathbf{B}$$

磁力矩的大小

$$M = BIa^2 \sin(90^\circ - \theta) = BIa^2 \cos \theta$$

重力矩为

$$M = mga \sin \theta + 2mg \cdot \frac{a}{2} \sin \theta = 2mga \sin \theta$$

平衡时

$$BIa^2 \cos \theta = 2mga \sin \theta$$

所以

$$B = \frac{2mg}{Ia} \tan \theta = \frac{2\rho g S}{I} \tan \theta$$

**例 6-6** 一圆柱形无限长导体, 磁导率为  $\mu$ , 半径为  $R$ , 通有沿轴线方向的均匀电流  $I$ , 求: (1) 导体内任一点的  $H$ 、 $B$  和  $M$ ; (2) 导体外任一点的  $H$ 、 $B$ 。

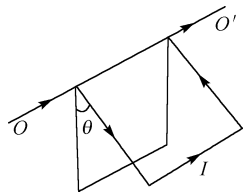


图 6.6 例 6-5 图

解: 如图 6.7 所示, 面电流密度为,  $i = \frac{I}{\pi R^2}$ 。

(1) 当  $r < R$  时, 利用  $\int_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum I$ , 有  $2\pi r \cdot H_1 = \pi r^2 i$ , 所以, 导体内任一点的磁场强度为

$$H_1 = \frac{I r}{2\pi R^2}$$

再由  $B = \mu H$ , 得导体内任一点的磁感应强度为

$$B_1 = \frac{\mu I r}{2\pi R^2}$$

利用公式  $M = \frac{B}{\mu_0} - H$ , 得到磁化强度为

$$M = \frac{1}{\mu_0} \frac{\mu I r}{2\pi R^2} - \frac{I r}{2\pi R^2} = \frac{I r}{2\pi R^2} \left( \frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right)$$

(2) 当  $r > R$  时, 利用  $\int_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum I$ , 得导体外任一点的磁场强度为

$$H_2 = \frac{I}{2\pi r}$$

磁感应强度为

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

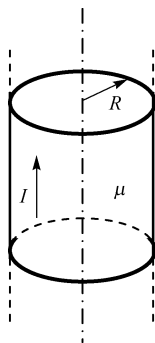


图 6.7 例 6-6 解图

**例 6-7** 螺绕环内通有电流 20A, 环上所绕线圈共 400 匝, 环的平均周长为 40cm, 环内磁感应强度为 1.0T, 计算: (1) 磁场强度; (2) 磁化强度; (3) 磁化率; (4) 磁化面电流和相对磁导率。

解: (1) 磁场强度:  $H = \frac{N}{L} I = \frac{400}{0.4} \times 20 = 2 \times 10^4 \text{ A/m}$

(2) 磁化强度:  $M = \frac{B}{\mu_0} - H = \frac{1}{4\pi \times 10^{-7}} - 2 \times 10^4 = 7.76 \times 10^5 \text{ A/m}$

(3) 磁化率:  $\chi_m = \mu_r - 1$ , 而  $\mu_r = \frac{B}{\mu_0 H}$ , 所以

$$\chi_m = \frac{B}{\mu_0 H} - 1 = 39.8 - 1 = 38.8$$

(4) 磁化面电流密度:  $\sigma_s = M = \frac{B}{\mu_0} - H = 7.76 \times 10^5 \text{ A/m}$ , 则磁化面电流为

$$i_s = \sigma_s L = 7.76 \times 10^5 \times 0.4 = 3.1 \times 10^5 \text{ A}$$

相对磁导率为

$$\mu_r = \frac{B}{\mu_0 H} = 39.8 \quad \text{或} \quad \mu_r = \chi_m + 1 = 38.8 + 1 = 39.8$$

**例 6-8** 如图 6.8 所示, 一半径为  $R_1$  的无限长圆柱形直导线外包裹着一层外径为  $R_2$  的圆筒形均匀介质, 其相对磁导率为  $\mu_r$ , 导线内通有电流强度为  $I$  的恒定电流, 且电流在导线横截面均匀分布。求:

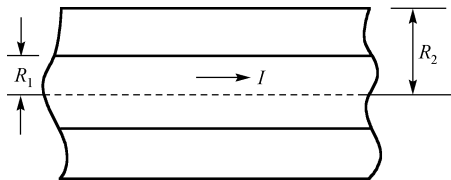


图 6.8 例 6-8 图

(1) 磁感应强度和磁场强度的径向分布, 并画出  $B \sim r$ 、 $H \sim r$  曲线;

(2) 介质内、外表面的磁化面电流密度 (设金属导线的  $\mu_r = 1$ )。

分析: 利用介质磁场的安培环路定理:  $\int_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum I$ ; 考虑到导线内电流密度为

$$i = \frac{I}{\pi R_1^2}, \text{ 从而可求出磁场分布。}$$

解: (1) 当  $r < R_1$  时, 有  $H_1 \cdot 2\pi r = \pi r^2 i$ , 可得

$$H_1 = \frac{I r}{2\pi R_1^2}, \quad B_1 = \mu H_1 = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R_1^2}$$

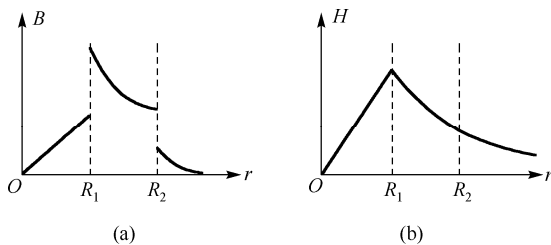
当  $R_1 < r < R_2$  时, 有  $H_2 \cdot 2\pi r = I$ , 可得

$$H_2 = \frac{I}{2\pi r}, \quad B_2 = \mu H_2 = \frac{\mu_0 \mu_r I}{2\pi r}$$

当  $r > R_2$  时, 有  $H_3 \cdot 2\pi r = I$ , 可得

$$H_3 = \frac{I}{2\pi r}, \quad B_3 = \mu H_3 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$B \sim r$ 、 $H \sim r$  曲线如图 6.9 所示。

图 6.9 (a)  $B \sim r$  曲线; (b)  $H \sim r$  曲线

(2) 当  $r = R_1$  时, 有  $M_1 = \frac{B_2}{\mu_0} - H_2$ , 即

$$M_1 = \frac{B_1}{\mu_0} - H_1 = \frac{I}{2\pi R_1}(\mu_r - 1)$$

根据  $\alpha' = \mathbf{M} \times \mathbf{e}_n$ , 有

$$\alpha'_1 = M_1 = \frac{(\mu_r - 1)I}{2\pi R_1}$$

同理, 当  $r = R_2$  时,  $M_2 = \frac{B_2}{\mu_0} - H_2$ , 有

$$\alpha'_2 = \frac{(\mu_r - 1)I}{2\pi R_2}$$

## 6.5 习题

6.1 下面哪一幅图线能确切描述载流圆线圈在其轴线上任意点所产生的磁感应强度  $B$  随  $x$  的变化关系 (见图 6.10) ( $x$  坐标轴垂直于圆线圈平面, 原点在圆线圈中心  $O$ )?

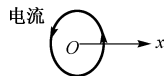
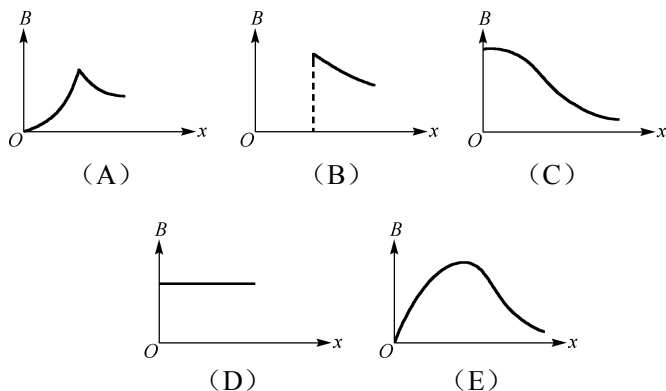


图 6.10 习题 6.1 图



6.2 取一闭合积分回路  $L$ ，使三根载流导线穿过它所围成的面。现改变三根导线之间的相互间隔，但不越出积分回路，则（ ）。

- (A) 回路  $L$  内的  $\sum I$  不变， $L$  上各点的  $\mathbf{B}$  不变  
 (B) 回路  $L$  内的  $\sum I$  不变， $L$  上各点的  $\mathbf{B}$  改变  
 (C) 回路  $L$  内的  $\sum I$  改变， $L$  上各点的  $\mathbf{B}$  不变  
 (D) 回路  $L$  内的  $\sum I$  改变， $L$  上各点的  $\mathbf{B}$  改变

6.3 一载有电流  $I$  的细导线分别均匀密绕在半径为  $R$  和  $r$  的长直圆筒上形成两个螺线管 ( $R=2r$ )，两螺线管单位长度上的匝数相等。两螺线管中的磁感应强度大小  $B_R$  和  $B_r$  应满足（ ）。

- (A)  $B_R = 2B_r$       (B)  $B_R = B_r$       (C)  $2B_R = B_r$       (D)  $B_R = 4B_r$

6.4 一均匀磁场，其磁感应强度方向垂直于纸面，两带电粒子在磁场中的运动轨迹如图 6.11 所示，则（ ）。

- (A) 两粒子的电荷必然同号  
 (B) 粒子的电荷可以同号也可以异号  
 (C) 两粒子的动量大小必然不同  
 (D) 两粒子的运动周期必然不同

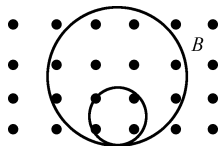


图 6.11 习题 6.4 图

6.5 半径为  $R$  的半圆线圈  $ACD$  通有电流  $I_2$ ，置于电流为  $I_1$  的无限长直线电流的磁场中，直线电流  $I_1$  恰过半圆的直径，两导线相互绝缘。求半圆线圈受到长直线电流  $I_1$  的磁力。

6.6 将通有电流  $I$  的导线在同一平面内弯成如图 6.12 所示的形状，求  $D$  点的磁感应强度  $\bar{B}$  的大小。

6.7 无限长直导线折成 V 形，顶角为  $\theta$ ，置于  $xy$  平面内，一个角边与  $x$  轴重合，如图 6.13 所示。当导线中有电流  $I$  时，求  $y$  轴上一点  $P(0, a)$  处的磁感应强度大小。

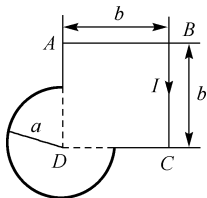


图 6.12 习题 6.6 图

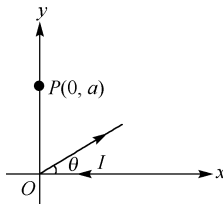


图 6.13 习题 6.7 图

6.8 已知半径为  $R$  的载流圆线圈与边长为  $a$  的载流正方形线圈的磁矩之比为 2:1，且载流圆线圈在中心  $O$  处产生的磁感应强度为  $B_0$ ，求在正方形线圈中心  $O'$  处的磁感应强度的大小。

6.9 在真空中, 电流由长直导线 1 沿垂直于底边  $bc$  方向经  $a$  点流入一由电阻均匀的导线构成的正三角形金属线框, 再由  $b$  点从三角形框流出, 经长直导线 2 沿  $cb$  延长线方向返回电源 (见图 6.14)。已知长直导线上的电流强度为  $I$ , 三角框的每一边长为  $l$ , 求正三角形的中心点  $O$  处的磁感应强度  $B$ 。

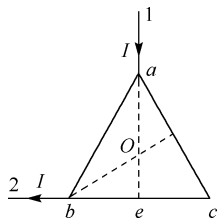


图 6.14 习题 6.9 图

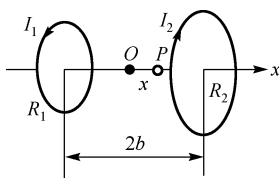


图 6.15 习题 6.10 图

6.11 一根同轴线由半径为  $R_1$  的长导线和套在它外面的内半径为  $R_2$ 、外半径为  $R_3$  的同轴导体圆筒组成。中间充满磁导率为  $\mu$  的各向同性均匀非铁磁绝缘材料, 如图 6.16 所示。传导电流  $I$  沿导线向上流出, 由圆筒向下流回, 在它们的截面上电流都是均匀分布的。求同轴线内外的磁感强度大小  $B$  的分布。

6.12 螺绕环中心周长  $l = 10\text{cm}$ , 环上均匀密绕线圈  $N = 200$  匝, 线圈中通有电流  $I = 0.1\text{A}$ 。管内充满相对磁导率  $\mu_r = 4200$  的磁介质。求管内磁场强度和磁感强度的大小。

6.13 一铁环中心线周长  $l = 30\text{cm}$ , 横截面  $S = 1.0\text{cm}^2$ , 环上紧密地绕有  $N = 300$  匝线圈。当导线中电流  $I = 32\text{mA}$  时, 通过环截面的磁通量  $\Phi = 2.0 \times 10^{-5}\text{Wb}$ 。试求铁芯的磁化率  $\chi_m$ 。

6.14 一根很长的长直圆管形导体, 内外半径分别为  $a$ 、 $b$ 。导体内通有沿轴线方向的电流  $I$ , 且电流  $I$  均匀地分布在管的横截面上。试证明导体中各点 ( $a < r < b$ ) 的磁场强度的量值由式

$$H = \frac{I}{2\pi(b^2 - a^2)} \cdot \frac{r^2 - a^2}{r}$$

给出。

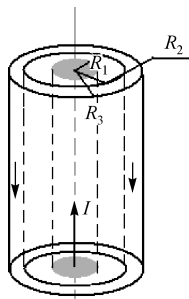


图 6.16 题 6.11 图

## 第7章 电磁感应 电磁场理论

第4~6章讨论了静止电荷的静电场和恒定电流的磁场，其场强 $E$ 和磁感强度 $B$ 在空间虽然可以逐点地变化，但在任一点上是不随时间变化的。这些场可以单独地处理，它们之间不存在相互的联系。本章进一步讨论随时间变化的电场与磁场（即变化电场与变化磁场），以及它们之间的相互联系和电磁场的传播。

麦克斯韦在总结前人工作的基础上，提出了著名的电磁场理论，指出变化电场和变化磁场形成了统一的电磁场，预言电磁场能够以波动的形式在空间传播，称为电磁波；并且算出电磁波在真空中传播的速度等于光速，从而断定光在本质上就是一种电磁波。后来，赫兹用振荡电路产生了电磁波，使麦克斯韦的学说得到了实验证明，为电学和光学奠定了统一的基础。因此，麦克斯韦的经典电磁场理论是人类对电磁规律的历史性总结，是19世纪物理学发展的一项最辉煌成就，是物理学发展史上一个重要的里程碑。

本章将首先介绍麦克斯韦提出的两个新概念——“涡旋电场”和“位移电流”，并在此基础上介绍电磁场理论的基本内容及其规律。然后简述电磁振荡和电磁波的产生及其在传播过程中的一些基本性质。要求读者对此有初步的认识。

顺便指出，在阅读电磁振荡和电磁波内容时，读者可对照上册教材“机械振动和机械波”一章的相应内容，将有助于理解本章内容。但要注意，机械波和电磁波只是在数学表述形式上类似，它们的本性则迥异，切莫把电磁过程简单地归结为机械过程。

### 7.1 学习要求

#### 1. 电磁感应

- (1) 理解感应电动势、动生电动势和感生电动势的概念及本质。
- (2) 掌握并能熟练应用法拉弟电磁感应定律和楞次定律来计算感应电动势，并判明其方向及电势高低。
- (3) 理解动生电动势和感生电动势的本质，能计算动生电动势和感生电动势，了解有旋场概念、自感系数和互感系数的基本概念及其物理意义。

#### 2. 电磁场理论

- (1) 了解电场和磁场具有能量和能量密度的概念，会计算简单的均匀磁场的能量。了解位移电流，全电流环路定律，麦克斯韦方程组的积分形式的物理意义。

(2) 了解电磁波的产生及基本性质, 麦克斯韦方程组的微分形式; 了解边界条件, 超导体的电磁性质。

## 7.2 内容提要

### 1. 基本概念

(1) 电磁感应现象: 当穿过闭合回路的磁通量发生变化时, 回路中就产生感应电动势, 在闭合回路中一般还有感应电流。即变化的磁场能激发电场, 这一现象被称为电磁感应现象。

(2) 自感现象: 由于回路中电流变化, 引起本身回路的磁通量变化, 而在回路中激起感应电动势的现象, 叫做自感现象。相应的电动势称为自感电动势。

(3) 互感现象: 由于一个线圈回路中电流发生变化而在附近的另外一个线圈中产生感应电动势的现象, 称为互感现象。相应的感应电动势称为互感电动势。

### 2. 法拉第电磁感应定律、楞次定律

(1) 楞次定律: 当穿过闭合导线回路的磁通量发生变化时, 回路中感应电流所产生的磁通量要抵偿引起感应电流的磁通量的改变。

(2) 法拉第电磁感应定律: 由电磁感应实验知道, 无论什么原因, 只要回路中磁通量随时间而变化, 回路中就有感应电动势, 感应电动势等于回路中磁通量对时间的变化率的负值, 其数学形式为

$$\varepsilon_i = -\frac{d\varphi_m}{dt} \quad (7-1)$$

式中,  $\varphi_m$  为通过回路的磁通量, 负号反映了感应电动势的方向, 它是楞次定律的数学表现。

### 3. 动生电动势、感生电动势和涡旋电场

(1) 动生电动势: 导体在磁场中运动并切割磁力线时, 导体中的自由电子受到洛伦兹力的作用, 而使导体中产生感应电动势。这种电动势是由于导体在磁场中运动所引起的, 故称为动生电动势, 若长为  $d\mathbf{l}$  的导线在外磁场  $\mathbf{B}$  中以速度  $\mathbf{v}$  运动时, 则它所具有的动生电动势为

$$\varepsilon_i = \int_{\text{导体}} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \quad (7-2)$$

积分是从  $l$  的一端到另一端。

对于闭合回路, 可用下面两种方法求动生电动势: ①将式 (7-2) 改为闭合回路积分, 即  $\varepsilon_i = \oint_l (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$ ; ②应用式 (7-1) 法拉第电磁感应定律计算。

(2) 感生电动势: 闭合回路或一段导线静止地处于磁场中, 当磁感应强度  $\bar{B}$  随时间变化, 即  $d\bar{B}/dt \neq 0$  时, 导体中产生的感应电动势为

$$\varepsilon_i = \oint \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\varphi_m}{dt} \quad (7-3)$$

(3) 涡旋电场: 变化的磁场在其周围空间激发的一种电场, 叫做感生电场 (又称为涡旋电场)。注意: 感生电场是由变化的磁场所激发的, 这与静电场是由静止电荷所激发的是不同的, 静电场是保守场, 其环流为零, 即

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

而感生电场电场强度  $\mathbf{E}_k$  的环流一般不为零, 将在后面电磁场理论中介绍。

#### 4. 自感和互感

设有  $N$  匝线圈, 通过每一匝线圈面积上的磁通量为  $\varphi_m$ , 则通过线圈的磁通链数为

$$\Phi_N = N\varphi_m \quad (7-4)$$

(1) 自感: 设有一任意回路, 回路中由于电流变化引起通过回路本身磁链变化而出现的感应电动势为

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi_N}{dt} = -\frac{d\Phi_N}{dI} \cdot \frac{dI}{dt} = -L \frac{dI}{dt}$$

式中

$$L = \frac{d\Phi_N}{dI} \quad (7-5)$$

定义为回路的自感。它等于回路中电流变化为单位值时, 在回路本身所围面积内引起磁链的改变值。它体现了回路中产生的自感电动势反抗电流改变的能力, 称为该回路的自感系数, 简称自感。如果回路的几何形状不变, 而且周围空间没有铁磁物质, 那么由毕奥-沙伐尔定律可知, 空间任一点的磁感应强度  $\bar{B}$  与回路中的电流  $I$  成正比, 通过回路的磁链  $\Phi_N$  也与电流  $I$  成正比。这时式 (7-5) 可写为

$$L = \frac{\Phi_N}{I} \quad (7-6)$$

即不存在铁磁性物质时, 回路自感的大小等于回路中电流为单位值时通过该回路所围面积的磁链。

(2) 互感: 设有两个回路  $C_1$  和  $C_2$ , 当  $C_1$  中的电流  $I_1$  变化时, 在  $C_2$  回路中将产生互感电动势

$$\varepsilon_{21} = -\frac{d\Phi_{21}}{dt} = -M_{21} \frac{dI_1}{dt} \quad (7-7a)$$

$M_{21}$  称为回路  $C_1$  对  $C_2$  的互感系数。

同理，当  $C_2$  中的电流  $I_2$  变化时，在  $C_1$  回路中将产生互感电动势

$$\varepsilon_{12} = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -M_{12} \frac{dI_{12}}{dt} \quad (7-7b)$$

$M_{12}$  称为回路  $C_2$  对  $C_1$  的互感系数。可以证明，对任意形状的两个回路的互感  $M_{21} = M_{12}$  总是成立的，因此统一用  $M$  表示，称为两个回路的互感系数。它反映了两个相邻回路各在另一个回路中产生互感电动势的能力。

### 5. 电场和磁场的能量

(1) 在电场中的电荷受到电场力的作用，移动电荷电场力要做功，这说明电场蕴藏着一定的能量（静电能）。电容器放电时，常伴随有热、光、声等现象的产生，也就是电容器储存的电场能量转换为其他形式能量的结果。电容器储存的能量为

$$W_e = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} QC \quad (7-8a)$$

式中， $C$  为电容器电容， $Q$  为电容器上的电荷量， $U$  为电容器极板间的电势差。

静电能就是电场的能量，而且分布在电场所占的整个空间之中。就平行板电容器而言，单位体积所具有的能量（能量密度）为  $w_e = \frac{W}{V} = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 = \frac{1}{2} DE$ ，在一般情况下，电场能量密度为

$$w_e = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \quad (7-8b)$$

能量密度的单位为  $\text{J} \cdot \text{m}^{-3}$ 。在各向同性线性介质中， $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ ，电场能量密度为

$$w_e = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 \quad (7-8c)$$

式 (7-8c) 对于非均匀电场和变化电磁场仍然正确，只是此时能量密度是逐点改变的。要计算整个带电系统的电场储存的能量，只需将电场所占空间分成许多体积元  $dV$ ，然后把这许多体积元中能量叠加起来，即

$$W = \int_V w_e dV = \int_V \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dV \quad (7-9)$$

积分区域遍及整个电场空间。

(2) 给一回路系统中通入电流时，由于各回路的自感和回路之间互感的作用，回路中的电流要经历一个从零到稳定值的变化过程，在这个过程中，电源必须提供能量用来克服自感电动势及互感电动势而做功，使电能转化为载流回路的能量和回路电流间的相互作用能，也就是磁场能量。

若一自感为  $L$  的回路，当其中通有电流  $I_0$  时，其周围空间磁场的能量为

$$W_m = \frac{1}{2} LI_0^2 \quad (7-10)$$

式(7-10)是用线圈的自感及其中的电流表示的, 经过变换, 磁能也可用描述磁场本身的量  $B$ 、 $H$  表示。例如, 一个螺线管内的磁感应强度为  $B = \mu n I$ , 它的自感  $L = \mu n^2 V$ , 式中,  $n$  为螺线管单位长度的匝数,  $V$  为螺线管内磁场空间的体积。把  $L$ 、 $I_0$  代入式(7-10)得到磁能的  $B$ 、 $H$  表示式

$$W_m = \frac{1}{2} LI_0^2 = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} V = \frac{1}{2} BHV \quad (7-11)$$

因而磁场能量密度为

$$w_m = \frac{W_m}{V} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} = \frac{1}{2} BH \quad (7-12)$$

一般情况下磁场能量密度的表示式为

$$w_m = \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \quad (7-13)$$

此式表示: 在任何磁场中, 某点的磁场能量密度只与该点的磁感应强度  $B$  及介质的性质有关。对整个磁场不为零的空间积分, 可得到磁场的总能量

$$W_m = \int_V w_m dV = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dV \quad (7-14)$$

## 6. 位移电流、全电流环路定律

在电容器的充放电过程中, 导线中的电流  $I$  在电容器极板处被截断了, 传导电流不再连续, 为了解决电流的不连续问题, 并在非稳恒电流产生的磁场中使安培环路定理也能成立, 麦克斯韦提出了位移电流的概念。

通过对电容器充放电过程的分析发现: 虽然传导电流在电容器两个极板之间中断了, 但是, 与此同时, 两个极板之间却出现了变化的电场。麦克斯韦指出: 除传导电流和运流电流能激发磁场外, 变化的电场也能激发磁场。在一闭合回路中, 若电场的电位移随时间的变化率  $\frac{dD}{dt} \neq 0$ , 那么在此闭合回路上, 应有

$$\mathbf{j}_d = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad I_d = \frac{d\Phi_e}{dt} = \int_s \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (7-15)$$

因此, 麦克斯韦把变化电场假设为电流, 引入位移电流的概念, 令  $I_d$  和  $\mathbf{j}_d$  分别称为位移电流强度和位移电流密度。式(7-15)表明: 电场中某一点的位移电流密度等于该点电位移矢量随时间的变化率; 通过电场中某一截面的位移电流等于通过该截面的电位移通量随时间的变化率。

引进位移电流概念后, 对电容器充放电过程中, 传导电流  $I$  虽不连续, 但传导电流  $I$  和

位移电流  $I_d$  相加的合电流  $I_1 = I + I_d$  (称为全电流) 总是连续的。在引入位移电流后, 全电流成为连续的。这样, 麦克斯韦还把非恒定情况下的安培环路定理修改为: 在磁场中  $H$  沿任一闭合回路的线积分, 在数值上等于穿过以该闭合回路为连线的任一曲面全电流, 即

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum (I + I_d) = \int_s \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} + \int_s \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = \int_s \left( \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} \quad (7-16)$$

该式也称为全电流定律, 应用非常普遍。将此关系用到电容器两极板之间情况, 得到

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_d = \int_s \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

式中,  $\int_s \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = \frac{dq}{dt} = I$  这个结果正是导线中的电流, 这就解决了电容器两个极板之间电流中断的矛盾。

由此可见, 麦克斯韦的有旋电场和位移电流的假设分别指出: 变化磁场产生有旋电场, 而变化电场则产生有旋磁场; 电场和磁场是相互联系的整体, 存在交变电场的空间就存在交变磁场, 同样, 存在交变磁场的空间存在交变电场。这就是麦克斯韦电磁场的基本概念。

## 7. 麦克斯韦方程组的积分形式及物理意义

由于麦克斯韦提出有旋电场和位移电流, 使电场和磁场的基本方程由

$$\begin{aligned} \oiint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} &= \sum q \\ \oiint_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} &= 0 \\ \oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= 0 \\ \oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} &= I \end{aligned} \quad (7-17a)$$

改写为

$$\begin{aligned} \oiint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} &= \sum q \\ \oiint_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} &= 0 \\ \oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= - \int_s \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \\ \oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} &= \int_s \left( \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} \end{aligned} \quad (7-17b)$$

这四个方程是电磁场的基本方程, 由它们出发可以导出静电场、有旋电场、恒定电流



磁场、交变电流磁场的公式，从而给出能系统完整地描述电磁场普遍规律的方程组，也称为麦克斯韦方程组的积分形式。由这组方程能解释电磁场的一些具体现象。

式(7-17b)中第一式表明，在任何电场中，通过任何封闭曲面的电位移能量等于这封闭面内自由电荷的代数和。

第二式说明，在任何磁场中，通过任何封闭曲面的磁通量总是等于零，这也是磁场的高斯定理。

第三式反映了变化磁场和电场的联系，它不但揭示了变化磁场激发电场的规律，而且在  $\partial \mathbf{B} / \partial t \neq 0$  时，仍能将自由电荷的静电场包含在内，因此在一般情况下该式中的  $\vec{E}$  可以认为是电荷的静电场与变化磁场激发电场的合场强。也就是说，在任何磁场中，电场强度沿任意闭合曲线的线积分等于通过该曲线所包围的磁通量的时间变化率的负值。

第四式揭示了传导电流的磁场和变化电场激发磁场的规律，它表明在任何磁场中，磁场强度沿任意闭合的线积分等于通过以该闭合曲线为边线的任意曲面的全电流。

### \*8. 电磁振荡和电磁波的产生

一切电场和磁场都来源于电荷及其运动。如果电荷相对于观察者做变速运动，那么，其周围的电场和磁场都将随时间而变化，从而将引起变化的电磁场在空间的相互激发，又称为电磁辐射。为此，先来看一个振荡偶极子（振荡偶极子实际上是一个电矩  $\mathbf{p} = q\mathbf{l}$  随时做周期性变化的电偶极子。最简单的振荡偶极子是电矩按余弦方式变化的偶极子，它的电矩大小  $p$  可表示为

$$p = p_0 \cos \omega t$$

式中， $p_0 = q_0 l_0$  为振幅， $q_0$  为电荷最大值； $\omega$  为角频率。这种振荡偶极子所激发的电场和磁场都是迅速变化的。

已知给一个线圈通上交变电流，在线圈内就会产生变化的磁场；而将一个电容器接在交变电路中，电容器中就会产生变化的电场。因此，将一个自感为  $L$  的线圈和一个电容为  $C$  的电容器串联在电路中就有可能产生变化的电磁场，这样的电路如图 7.1 所示，称为 LC 电路。LC 电路可以实现电磁振荡，能产生电磁振荡的电路称为振荡电路。

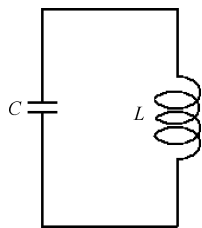


图 7.1 LC 电路

### \*9. 边界条件、超导体的电磁性质

(1) 任何电磁场都存在于一定的媒质中，媒质中  $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{D}$  的关系及  $\mathbf{B}$  和  $\mathbf{H}$  的关系由本构关系给出。若媒质是线性且各向同性的，则有

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{D} &= \varepsilon \mathbf{E} \\ \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H} \\ \mathbf{J} &= \sigma \mathbf{E} \end{aligned} \right\} \quad (7-18)$$

式(7-18)称为媒质的本构关系。有了麦克斯韦方程组但还不能完全求解,从数学上说,要有边界条件,麦克斯韦方程组才有确定的解。边界条件由麦克斯韦方程组积分形式得出。

切向分量的边界条件 1

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{J}_S \quad \text{或} \quad H_{1t} - H_{2t} = J_S \quad (7-19)$$

切向分量的边界条件 2

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0 \quad \text{或} \quad E_{1t} = E_{2t} \quad (7-20)$$

法向分量的边界条件 1

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0 \quad \text{或} \quad B_{1n} = B_{2n} \quad (7-21)$$

法向分量的边界条件 2

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \rho_S \quad \text{或} \quad D_{1n} - D_{2n} = \rho_S \quad (7-22)$$

(2) 超导体的电磁性质

1911年,昂内斯发现,当温度降低到4.2K附近时,汞样品的电阻突然降到零。不仅纯汞,而且汞加入杂质后,甚至汞和锡的合金也具有这种性质,他把这种性质称为超导电性,具有超导电性的材料称为超导体。超导体的电磁性质有以下四点:

① 零电阻性,即对电流没有任何阻力,电流可以在超导体内长期流动,不产生热效应,一般超导体在通过电流时两端没有电压。

② 完全抗磁性(迈斯纳效应),即当一个磁体和一个处于超导态的超导体相互靠近时,磁体的磁场会使超导体表面中出现超导电流。此超导电流形成的磁场在超导体内部恰好和磁体的磁场大小相等,方向相反,这两个磁场相互抵消,使超导体内部的磁感应强度为零,即超导体排斥体内的磁场。或者说,磁力线完全不能穿透它,磁力线可以悬浮于磁场上方,利用这一点可以制成无摩擦轴承。如果将一超导体样品放入磁场中,由于穿过样品的磁通量发生了变化,所以表面产生电流,这电流将在样品内部产生磁场,完全抵消掉内部的外磁场,使超导体内部的磁场为零,根据公式  $\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}$  和  $\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$ , 由于超导体内  $\mathbf{B} = 0$ ,

因而  $\chi_m = -1$ , 故超导体具有完全抗磁性。

③ 超导体存在临界磁场与临界电流。1913年,昂内斯发现当超导体中的电流超过某一临界值时,导体就会转变为正常态。之后他又发现,超导体材料的超导态可以被外加磁场破坏而转入正常态,这种破坏超导态所需的最小磁场强度称为临界磁场。临界磁场的存在,限制了超导体中能够通过的电流,当通过超导体导线的电流超过一定数值  $I_c$  后,超导态便被破坏,  $I_c$  称为超导体的临界电流。

④ 闭合超导体线圈在被感生出电流后,可将电能储存起来,可用作超导储能器。

## 7.3 重点难点分析

### 1. 本章重点

在研究了静电场和稳恒磁场的规律之后, 进一步认识变化的磁场激发电场、变化的电场激发磁场的本质和规律, 是本章的重点。具体包括动生电动势、感生电动势、自感、互感现象、电磁感应定律及磁场的能量关系, 以及电磁场基本方程(积分形式)。

### 2. 本章难点

本章的难点是对感生电场、动生电场等基本概念的理解, 对自感、互感现象的理解, 以及对电磁感应定律中动生电动势、感应电动势产生的本质的认识。

动生电动势是由于导体回路在磁场中运动, 导体中自由电子受洛伦兹力所致; 而感应电动势是导体回路不动, 而通过回路的磁通亦即磁场变化, 此时导体中的自由电子由于  $\vec{B}$  变化而受到一个力作用而发生定向移动。需要注意, 磁场变化对导体中自由电子的作用力既不是洛伦兹力(电荷无宏观运动), 也不是库仑力(与磁场无关), 而是变化磁场的一种特殊性质, 它会对静止电荷、运动电荷产生一个作用力。

这种特殊性质就是电场——变化的磁场激发的电场, 称为感生电场, 这在麦克斯韦方程组中的第一式和第三式  $\left[ \oint_s \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum q (\sum q = 0), \oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \right]$  反映出来。由此可见, 感生电场线是闭合的, 感生电场是有旋场, 不是保守场。这是与静电场截然不同的。但静电场、感生电场都对电荷有力的作用。

## 7.4 精选例题分析

**例 7-1** 一圆形的平行板电容器, 其半径为 8.0cm, 极板间距为 0.1cm, 中间充满相对介电率为 5.5 的电介质, 若电容器充电到 100V, 求两极板所带电荷量为多少? 储存的电能为多少?

**解:** 根据平行板电容器的电容公式, 可得此电容器的电容为

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d} = 9.78 \times 10^{-10} \text{ F}$$

所以此电容器所带电荷量为

$$Q = CU = 9.78 \times 10^{-8} \text{ C}$$

储存的电量为

$$W_e = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}QU = \frac{Q^2}{2C} \approx 4.9 \times 10^{-6} \text{ J}$$

**例 7-2** 一根横截面半径为  $R$  的圆柱形长直载流铜导线, 其电流为  $I$ , 在导线的横截面上电流是均匀分布的。求半径为  $r$  ( $r > R$ ), 长度为  $l$ , 与导线同轴的圆柱体内的磁场能量。

**解:** 将长直导线看成是无限长圆柱体, 在圆柱体的内、外均有磁场, 根据磁场环路定理可知, 圆柱体内的磁感应强度分布为

$$B_1 = \frac{\mu I r}{2\pi R^2} \quad (r > R) \quad (\text{I})$$

由于铜的相对磁导率  $\mu_r \approx 1$ , 故上式中的  $\mu \approx \mu_0$ 。圆柱体外的磁感应强度分布为 (空气的磁导率  $\mu \approx \mu_0$ )

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (r < R) \quad (\text{II})$$

取体积元是长为  $l$ , 半径分别为  $r$  和  $r + dr$  与长直导线共轴的圆柱壳, 那么该体积元的体积为

$$dV = 2\pi r dr \quad (\text{III})$$

利用磁场能量公式, 所求圆柱体内的能量为

$$W_m = \int w_m dV = \int_0^R \frac{1}{2} \frac{B_1^2}{\mu} dV + \int_R^r \frac{1}{2} \frac{B_2^2}{\mu_0} dV$$

将式 (I) ~ 式 (II) 代入上式得

$$W_m = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi R^2} \int_0^R r^2 dr + \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \int_R^r \frac{1}{r} dr = \frac{\mu_0 I^2 l}{16\pi} + \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \ln \frac{r}{R}$$

**例 7-3** 反映电磁场基本性质的麦克斯韦方程组的积分形式有

$$\oiint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \sum q \quad (1) \quad \oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_s \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (2)$$

$$\oiint_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (3) \quad \oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_s \left( \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} \quad (4)$$

试判断下列结论包含于或等效于上述哪个方程式?

- (A) 电荷总伴随有电场 (1); (B) 静电场是保守场 (2);  
 (C) 磁感应线总是闭合的 (3); (D) 变化的磁场一定伴随有电场 (2);  
 (E) 感生电场是有旋的 (2); (F) 变化的电场总伴随有磁场 (4);  
 (G) 电场线的头尾在电荷上 (1)。

**例 7-4** 如图 7.2 所示, 长直导线中通有电流  $I = 5.0 \text{ A}$ , 在与其相距  $d = 0.5 \text{ cm}$  处放有

一矩形线圈，共 1000 匝，设线圈长  $l = 4.0\text{cm}$ ，宽  $a = 2.0\text{cm}$ 。不计线圈自感，若线圈以速度  $v = 3.0\text{cm/s}$  沿垂直于长导线的方向向右运动，线圈中的感生电动势多大？

解：

解法（1）：利用法拉第电磁感应定律解答。

首先由  $\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum I$  求出电场分布，得： $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ ，则矩形线圈内的磁通量为

$$\Phi = \int_x^{x+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot l dr = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{x+a}{x}$$

根据  $\varepsilon_i = -N \frac{d\Phi}{dt}$ ，有

$$\varepsilon_i = -\frac{N\mu_0 I l}{2\pi} \left( \frac{1}{x+a} - \frac{1}{x} \right) \cdot \frac{dx}{dt}$$

所以，当  $x = d$  时，有

$$\varepsilon_i = \frac{N\mu_0 I l a v}{2\pi(d+a)} = 1.92 \times 10^{-4} \text{ V}$$

解法（2）：利用动生电动势公式解答。

由  $\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum I$  求出电场分布，得： $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ ，考虑线圈框架的两个平行长直导线

部分产生动生电动势，有

近端部分： $\varepsilon_1 = NB_1 l v$

远端部分： $\varepsilon_2 = NB_2 l v$

则

$$\varepsilon = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \frac{N\mu_0 I}{2\pi} \left( \frac{1}{d} - \frac{1}{d+a} \right) l v = \frac{N\mu_0 I a l v}{2\pi d(d+a)} = 1.92 \times 10^{-4} \text{ V}$$

**例 7-5** 如图 7.3 所示，长直导线中通有电流强度为  $I$  的电流，长为  $l$  的金属棒  $ab$  与长直导线共面且垂直于导线放置，其  $a$  端距离导线为  $d$ ，并以速度  $\bar{v}$  平行于长直导线做匀速运动，求金属棒中的感应电动势  $\varepsilon$  并比较  $U_a$ 、 $U_b$  的大小。

解：

解法（1）：如图 7.3(a)所示，利用动生电动势公式求解，有

$$d\varepsilon = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = v \cdot \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dr$$

所以

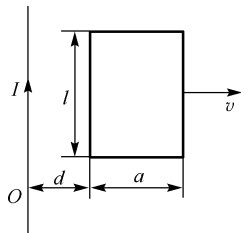


图 7.2 例 7-4 图

$$\varepsilon = -\frac{\mu_0 v I}{2\pi} \int_d^{d+l} \frac{dr}{r} = -\frac{\mu_0 v I}{2\pi} \ln \frac{d+l}{d}$$

由右手定则判定:  $U_a > U_b$ 。

**解法(2):** 如图 7.3(b)所示, 利用法拉第电磁感应定律求解。作辅助线, 形成闭合回路  $abb'a'$ 。

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_d^{d+l} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} y dr = \frac{\mu_0 I y}{2\pi} \ln \frac{d+l}{d}$$

所以

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{d+l}{d} \cdot \frac{dy}{dt} = -\frac{\mu_0 I v}{2\pi} \ln \frac{d+l}{d}$$

由右手定则判定:  $U_a > U_b$ 。

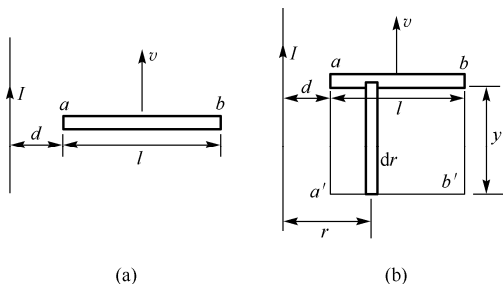


图 7.3 例 7-5 图

**例 7-6** 直导线中通以交流电, 如图 7.4 所示, 置于磁导率为  $\mu$  的介质中, 已知  $I = I_0 \sin \omega t$ , 其中  $I_0$ 、 $\omega$  是大于零的常量, 求与其共面的  $N$  匝矩形回路中的感应电动势。

**解:** 首先用  $\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum I$  求出电场分布, 得  $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$ , 则矩

形线圈内的磁通量为

$$\Phi = \int_d^{d+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot l dr = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{d+a}{d} = \frac{\mu_0 I_0 l}{2\pi} \sin \omega t \ln \frac{d+a}{d}$$

所以

$$\varepsilon = -N \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{N \mu_0 I_0 l}{2\pi} \omega \cos \omega t \ln \frac{d+a}{d}$$

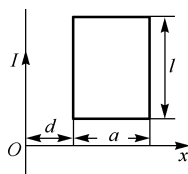


图 7.4 例 7-6 图

**例 7-7** 圆柱形匀强磁场中同轴放置一金属圆柱体, 半径为  $R$ , 高为  $h$ , 电阻率为  $\rho$ , 如图 7.5(a)所示。若匀强磁场以  $\frac{dB}{dt} = k$  ( $k > 0$ ,  $k$  为恒量) 的规律变化, 求圆柱体内涡电流的热功率。

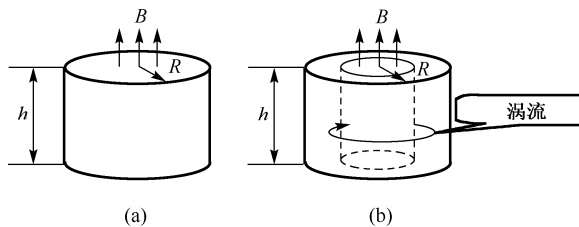


图 7.5 例 7-7 图

解：在圆柱体内任取一个半径为  $r$ ，厚度为  $dr$ ，高为  $h$  的小圆柱筒壁，有

$$\oint_l \boldsymbol{E}_{\text{涡}} \cdot d\boldsymbol{l} = \frac{dB}{dt} \cdot \pi r^2$$

即

$$\varepsilon_{\text{涡}} = \frac{dB}{dt} \cdot \pi r^2 = k \pi r^2$$

由电阻公式  $R = \rho \frac{l}{S}$ ，考虑涡流通过一个  $dr$  环带，如图 7.5(b) 所示，有电阻  $R = \rho \frac{2\pi r}{h dr}$ ，而热功率

$$dP = i^2 R = \frac{k^2 \pi h}{2\rho} r^3 dr$$

所以

$$P = \frac{k^2 \pi h}{2\rho} \int_0^R r^3 dr = \frac{k^2 \pi h R^4}{8\rho}$$

**例 7-8** 磁感应强度为  $B$  的均匀磁场充满一半径为  $R$  的圆形空间，一金属杆  $ac$  放在如图 7.6 所示位置，杆长为  $2R$ ，其中一半位于磁场内，另一半位于磁场外。当  $\frac{dB}{dt} > 0$  时，求杆两端感应电动势的大小和方向。

解：因为  $\varepsilon_{ac} = \varepsilon_{ab} + \varepsilon_{bc}$ ，而  $\varepsilon_{ab} = -\frac{d\Phi_{\text{扇形}Oab}}{dt}$ ，所以

$$\varepsilon_{ab} = -\frac{d}{dt} \left[ -\frac{\sqrt{3}}{4} R^2 B \right] = \frac{\sqrt{3} R^2}{4} \frac{dB}{dt}$$

$$\varepsilon_{bc} = -\frac{d\Phi_{\Delta Obc}}{dt} = -\frac{d}{dt} \left[ -\frac{\pi R^2}{12} B \right] = \frac{\pi R^2}{12} \frac{dB}{dt}$$

所以

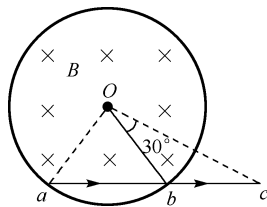


图 7.6 例 7-8 图

$$\varepsilon_{ac} = \left[ \frac{\sqrt{3}R^2}{4} + \frac{\pi R^2}{12} \right] \frac{dB}{dt}$$

因为  $\frac{dB}{dt} > 0$ , 所以  $\varepsilon_{ac} > 0$ , 即  $\varepsilon_{ac}$  从  $a \rightarrow c$ 。

**例 7-9** 一圆形线圈  $A$  由 50 匝细导线绕成, 其面积为  $4\text{cm}^2$ , 放在另一个匝数等于 100 匝、半径为  $20\text{cm}$  的圆形线圈  $B$  的中心, 两线圈同轴。设线圈  $B$  中的电流在线圈  $A$  所在处激发的磁场可看作匀强磁场。求: (1) 两线圈的互感; (2) 当线圈  $B$  中的电流以  $50\text{A/s}$  的变化率减小时, 线圈  $A$  中的感生电动势的大小。

**解:** 设  $B$  中通有电流  $I$ , 则在  $A$  处产生的磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 N_B I}{4\pi R_B^2} \cdot 2\pi R_B = \frac{\mu_0 N_B I}{2R_B}$$

(1)  $A$  中的磁通链为

$$\psi_A = N_A B S_A = \frac{\mu_0 N_A N_B I}{2R_B} \cdot S_A$$

则

$$M = \frac{\psi_A}{I_B} = \frac{\mu_0 N_A N_B S_A}{2R_B}$$

所以

$$M = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 50 \times 100 \times 4 \times 10^{-4}}{2 \times 0.2} = 20\pi \times 10^{-7} = 6.28 \times 10^{-6} \text{ H}$$

(2) 因为

$$\frac{d\psi_A}{dt} = \frac{\mu_0 N_A N_B S_A}{2R_B} \cdot \frac{dI}{dt} = 6.28 \times 10^{-6} \times 50 = 3.14 \times 10^{-4} \text{ V}$$

所以

$$\varepsilon_A = 3.14 \times 10^{-4} \text{ V}$$

## 7.5 习题

7.1 如图 7.7 所示, 圆形截面区域内存在着与截面相垂直的磁场, 磁感应强度随时间变化。



① 磁场区域外有一个与圆形截面共面的矩形导体回路  $abcd$ ,  $\varepsilon_{ab}$  表示在导体  $ab$  段上产生的感生电动势,  $I$  表示回路中的感应电流, 则 ( )。

(A)  $\varepsilon_{ab} = 0; I = 0$

(B)  $\varepsilon_{ab} = 0; I \neq 0$

(C)  $\varepsilon_{ab} \neq 0; I = 0$

(D)  $\varepsilon_{ab} \neq 0; I \neq 0$

② 位于圆形区域直径上的导体棒  $ab$  通过导线与阻值为  $R$  的电阻连接形成回路,  $\varepsilon_{ab}$  表示在导体  $ab$  段上产生的感生电动势,  $I$  表示回路中的感应电流, 则 ( )。

(A)  $\varepsilon_{ab} = 0; I = 0$

(B)  $\varepsilon_{ab} = 0; I \neq 0$

(C)  $\varepsilon_{ab} \neq 0; I = 0$

(D)  $\varepsilon_{ab} \neq 0; I \neq 0$

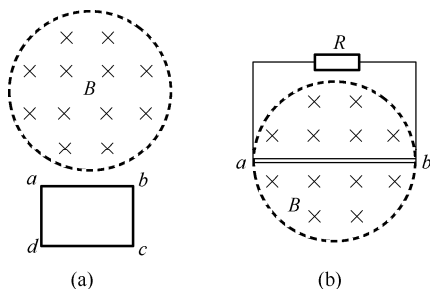


图 7.7 习题 7.1 图

7.2 空间有限的区域内存在随时间变化的磁场, 所产生的感生电场强度为  $E_i$ , 在不包含磁场的空间区域中分别取闭合曲面  $S$ , 闭合曲线  $l$ , 则 ( )。

(A)  $\iint_S E_i \cdot dS = 0$      $\oint_l E_i \cdot dl = 0$     (B)  $\iint_S E_i \cdot dS = 0$      $\oint_l E_i \cdot dl \neq 0$

(C)  $\iint_S E_i \cdot dS \neq 0$      $\oint_l E_i \cdot dl = 0$     (D)  $\iint_S E_i \cdot dS \neq 0$      $\oint_l E_i \cdot dl \neq 0$

7.3 如图 7.8 所示, 金属圆环半径为  $R$ , 位于磁感应强度为  $B$  的均匀磁场中, 圆环平面与磁场方向垂直。当圆环以恒定速度  $v$  在环所在平面内运动时, 求: (1) 环中的感应电动势; (2) 环上位于与运动方向垂直的直径两端  $a$ 、 $b$  间的电势差。

7.4 如图 7.9 所示, 两条平行长直导线和一个矩形导线框共面。且导线框的一个边与长直导线平行, 它到两长直导线的距离分别为  $r_1$ 、 $r_2$ 。已知两导线中电流都为  $I = I_0 \sin \omega t$ , 其中  $I_0$  和  $\omega$  为常数,  $t$  为时间。导线框长为  $a$ , 宽为  $b$ , 求导线框中的感应电动势。

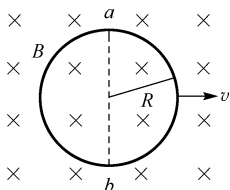


图 7.8 习题 7.3 图

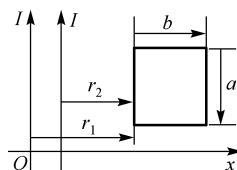


图 7.9 习题 7.4 图

7.5 如图 7.10 所示, 无限长直导线, 通以恒定电流  $I$ 。有一与之共面的直角三角形线圈  $ABC$ 。已知  $AC$  边长为  $b$ , 且与长直导线平行,  $BC$  边长为  $a$ 。若线圈以垂直于导线方向的速度  $\bar{v}$  向右平移, 当  $B$  点与长直导线的距离为  $d$  时, 求线圈  $ABC$  内的感应电动势的大小和感应电动势的方向。

7.6 长直导线和矩形导线框共面, 如图 7.11 所示, 线框的短边与导线平行。如果矩形线框中有电流  $i = I_0 \sin \omega t$ , 则长直导线中就有感应电动势, 试证明其值为

$$\varepsilon_i = -\frac{\mu_0 c I_0 \omega}{2\pi} \left( \ln \frac{b}{a} \right) \cos \omega t$$

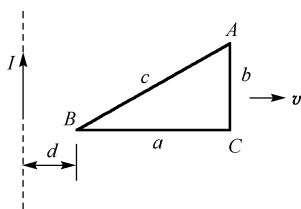


图 7.10 习题 7.5 图

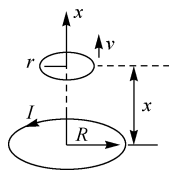


图 7.11 习题 7.6 图

7.7 载流长直导线与矩形回路  $ABCD$  共面, 导线平行于  $AB$ , 如图 7.12 所示。求下列情况下  $ABCD$  中的感应电动势:

- (1) 长直导线中电流  $I = I_0$  不变,  $ABCD$  以垂直于导线的速度  $\bar{v}$  从图示初始位置远离导线匀速平移到某一位置时 ( $t$  时刻);
- (2) 长直导线中电流  $I = I_0 \sin \omega t$ ,  $ABCD$  不动;
- (3) 长直导线中电流  $I = I_0 \sin \omega t$ ,  $ABCD$  以垂直于导线的速度  $\bar{v}$  远离导线匀速运动, 初始位置也如图示位置。

7.8 如图 7.13 所示, 两个半径分别为  $R$  和  $r$  的同轴圆形线圈相距  $x$ , 且  $R \gg r$ ,  $x \gg R$ 。若大线圈通有电流  $I$  而小线圈沿  $x$  轴方向以速率  $v$  运动, 试求  $x = NR$  时 ( $N$  为正数) 小线圈回路中产生的感应电动势的大小。

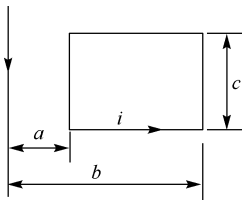


图 7.12 习题 7.7 图

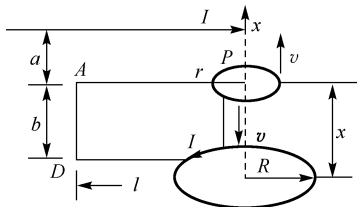


图 7.13 习题 7.8 图

7.9 如图 7.14 所示, 有一弯成  $\theta$  角的金属架  $COD$  放在磁场中, 磁感强度  $\bar{B}$  的方向垂

直于金属架  $COD$  所在平面。一导体杆  $MN$  垂直于  $OD$  边, 并在金属架上以恒定速度  $\mathbf{v}$  向右滑动,  $\mathbf{v}$  与  $MN$  垂直。设  $t=0$  时,  $x=0$ 。求下列两情形下框架内的感应电动势  $\varepsilon_i$ 。

- (1) 磁场分布均匀, 且  $\mathbf{B}$  不随时间改变;
- (2) 非均匀的时变磁场  $B = Kx \cos \omega t$ 。

7.10 载有电流的  $I$  长直导线附近, 放置一导体半圆环  $MeN$  与长直导线共面, 且端点  $MN$  的连线与长直导线垂直。半圆环的半径为  $b$ , 环心  $O$  与导线相距  $a$ 。设半圆环以速度  $\mathbf{v}$  平行导线平移, 求半圆环内感应电动势的大小和方向以及  $MN$  两端的电压  $U_M - U_N$ 。

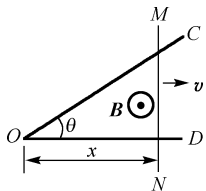


图 7.14 习题 7.9 图

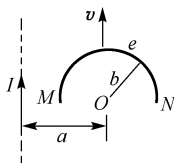


图 7.15 习题 7.10 图

7.11 有一匝数为  $N=200$  匝的线圈, 通过每匝线圈的磁通量  $\Phi = 5 \times 10^{-4} \sin 10\pi t$  (Wb), 则任一时刻线圈内的感应电动势为\_\_\_\_\_;  $t=10\text{s}$  时, 线圈内的感应电动势为\_\_\_\_\_。

7.12 在一般情况下, 对于由自由电荷和变化磁场激发的电场, 如用  $\mathbf{D}$  表示总电位移, 则介质中电场强度的高斯定理为\_\_\_\_\_; 经麦克斯韦修正后的安培环路定理为\_\_\_\_\_。

7.13 如图 7.16 所示, 一铜片厚为  $0.15\text{mm}$ , 电荷的数密度为  $1.0 \times 10^{24} \text{m}^{-3}$ , 将其放入  $B=0.1\text{T}$  的均匀磁场中, 当铜片通以  $10\text{mA}$  电流时, 求铜片两侧的霍尔电压, 若使用同样尺寸的半导体霍尔片, 其电荷的数密度为  $1.0 \times 10^{20} \text{m}^{-3}$ , 求其相应的霍尔电压。

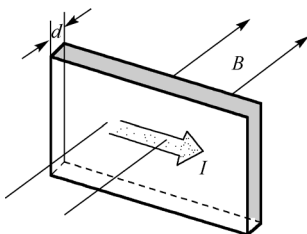


图 7.16 习题 7.13 图

7.14 在真空中, 一均匀电场中的电场能量密度与一磁感应强度为  $0.5\text{T}$  的均匀磁场中的磁场能量密度相等, 求该电场的电场强度大小。

7.15 求长度为  $L$  的金属杆在均匀磁场  $\mathbf{B}$  中绕平行于磁场方向的定轴  $OO'$  转动时的动生电动势。已知杆相对于均匀磁场  $\mathbf{B}$  的方位角为  $\theta$ , 杆的角速度为  $\omega$ , 转向如图 7.17 所示。

7.16 在相距  $2r+l$  的平行长直载流导线中间放置一固定的  $\Pi$  字形支架, 如图 7.18 所

示。该支架由硬导线和一电阻串联而成且与载流导线在同一平面内。两长直导线中电流的方向相反，大小均为  $I$ 。金属杆  $DE$  垂直嵌在支架两臂导线之间，以速度  $v$  在支架上滑动，求此时  $DE$  中的感应电动势。

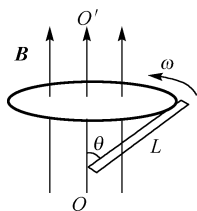


图 7.17 习题 7.15 图

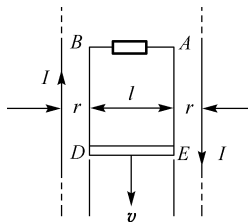


图 7.18 习题 7.16 图

7.17 一螺绕环单位长度上的线圈匝数为  $n=10$  匝/cm。环心材料的磁导率  $\mu=\mu_0$ 。求在电流强度  $I$  为多大时，线圈中磁场的能量密度  $w=1\text{J}\cdot\text{m}^{-3}$ ？（ $\mu_0=4\pi\times 10^{-7}\text{T}\cdot\text{m}\cdot\text{A}^{-1}$ ）

7.18 一螺绕环共  $N$  匝线圈，截面为长方形，其尺寸如图 7.19 所示。试用能量法证明此螺绕环自感系数为  $L=\frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$ 。

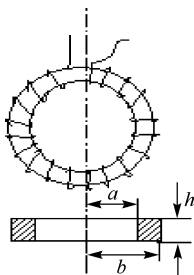


图 7.19 习题 7.18 图

## 第8章 气体动理论 热力学基础

热学是研究物体热性质，揭示热现象规律的一门科学。按照研究方法的不同，热学可分为热力学和统计物理学两部分。热力学是热学的宏观理论，它根据观察和实验总结出来的热力学定律，用严密逻辑推理的方法来研究系统的热性质。统计物理学是研究物质热运动的微观理论。从物质由大量微观粒子组成这一基本事实出发，运用统计方法，把物质的宏观性质看作大量微观粒子热运动的统计平均结果，从而找出宏观量与微观量的关系，进而解释物质的宏观性质。与统计物理学相比，热力学理论更具可靠性和普遍性，它可以验证微观理论的正确与否，统计物理学则是从本质上来揭示热现象的规律，所以在对热现象的研究上二者是相辅相成，彼此联系又互相补充的。

### 8.1 学习要求

#### 1. 气体状态方程 内能

(1) 了解状态参量、平衡态的概念及分类，热力学第零定律的意义；理解理想气体状态方程的意义并能用它解决有关气体状态方程问题。

(2) 准确理解准静态过程、体积功、热量、内能等概念，并掌握其相关计算。

#### 2. 热力学第一定律

(1) 掌握热力学第一定律的意义，并能利用它对理想气体各过程进行分析和计算；理解热容量的概念，能直接计算理想气体各过程的热量传递。

(2) 理解循环过程、卡诺循环、热机效率和致冷系数的概念；掌握卡诺循环的特征，掌握卡诺正循环效率及卡诺逆循环制冷系数的计算。

#### 3. 热力学第二定律

(1) 了解实际宏观过程的不可逆性的意义；理解热力学概率的意义及它和实际过程进行方向的关系。

(2) 掌握理想气体的微观模型和统计假设，并能推导理想气体压强的和温度公式；理解理想气体压强和温度的统计意义。

(3) 理解自由度概念，理解能量均分定理的意义，并能由它导出理想气体内能公式。

(4) 理解熵增加原理是热力学第二定律的数学表达式的深刻内涵；了解可逆过程的概念，能计算简单问题的熵变。

#### 4. 麦克斯韦 玻尔兹曼分布率

(1) 理解速率分布函数及麦克斯韦速率分布律的意义，会计算 3 种统计速率。

(2) 理解平均自由程、平均碰撞频率的概念。

(3) 了解波尔兹曼分布律的意义和粒子在重力场中按高度分布的公式。

#### 5. 输运现象

(1) 了解气体的 3 种输运过程的物理本质及其宏观规律和微观定性解释。

## 8.2 内容提要

### 1. 基本概念

#### (1) 状态参量

为了描述系统的状态，人们采用一些物理量来表示系统的有关特性，如体积、温度、压强、浓度等。这些描述状态的变量，称为状态参量。状态参量通常分为几何参量、力学参量、化学参量和电磁参量等。对于一定质量的气体，它的状态一般可用压强  $p$ 、体积  $V$  和温度  $T$  三个量来表征，这三个量叫做气体的状态参量。

#### (2) 平衡态

在不受外界影响的条件下，热力学系统的所有宏观物理性质不随时间变化而变化的状态。或者说，在不受外界影响的条件下，系统宏观性质均匀一致、不随时间变化的状态称为平衡态。

满足平衡态的条件是：①系统与外界在宏观上无能量和物质的交换；②系统的宏观性质不随时间改变。

#### (3) 热力学第零定律

如果  $T_A = T_B$ 、 $T_B = T_C$ ，那么  $T_A = T_C$ （传递性规律）。即热力学系统 A、B 与 C 同时处于平衡态，那么 A 与 B 也处于平衡态。

#### (4) 理想气体

严格遵守四条实验定律（玻意耳定律、盖-吕萨克定律、查理定律和阿伏伽德罗定律）的气体，称为理想气体。

① 理想气体是一种理想模型，它反映气体的共性；

② 实验事实表明，在通常情况下，各种实际气体都可近似看作是理想气体。

#### (5) 理想气体的状态方程

$$pV = NkT = \frac{M}{M_{\text{mol}}} RT = \nu RT \quad (8-1a)$$

$$p = nkT \quad (8-1b)$$

式中,  $N$  为气体分子数,  $k$  为玻尔兹曼常数,  $\nu$  为物质的量,  $R$  为气体普适常数,  $M$  为气体质量,  $M_{\text{mol}}$  为摩尔质量,  $n$  为气体分子数密度。

#### (6) 热力学过程的相关概念

① 热力学过程: 系统从一个平衡态转化到另一个平衡态所经历的变化过程, 称为热力学过程;

② 弛豫时间: 系统从一个平衡态转化到另一个平衡态所需要的时间;

③ 准静态过程: 系统从一个平衡态转化到另一个平衡态所经历的过程是无限缓慢的, 从而使系统所经历的每个中间状态都可近似地看成是平衡态, 那么系统的这个状态变化过程称为准静态过程;

④ 非静态过程: 若系统从一个平衡态转化到另一个平衡态所经历的中间状态是非平衡态, 则这个过程为非静态过程。

说明: a) 准静态过程为理想过程; b) 一个热力学过程为准静态过程的必要条件为两平衡态转化所经历的时间大于弛豫时间; c) 准静态过程可以用宏观参量图(状态图)表示, 如气体的准静态过程在  $p \sim V$  图上可用一条曲线表示。

#### (7) 功、热量和内能

在热力学中, 功的概念非常广, 例如, 气体非常缓慢膨胀的过程中, 可视该气体系统为准静态过程, 在此过程中, 气体所做的功为

$$dA = p(Sdl) = pdV \quad (8-2a)$$

式中,  $dV$  为气体体积的微小增量,  $p$  为气体压强。对一有限变化过程, 气体的功为

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p(Sdl) = \int_{V_1}^{V_2} pdV \quad (8-2b)$$

它在数值上等于  $p \sim V$  图上过程曲线下方的面积, 如图 8.1 所示。

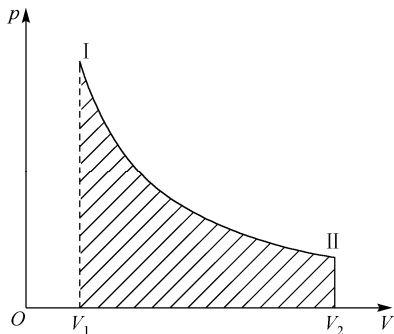


图 8.1 气体膨胀时所做的功

传热过程中所传递的能量的多少称为热量, 通常用  $Q$  表示。当一定量的气体温度发生变化时, 它吸收的热量为

$$Q = \nu C_V \Delta T \quad (8-3)$$

式中,  $C_V$  为摩尔热容量,  $\nu$  为摩尔数 (物质的量)。也常称  $\nu C_V$  为系统的热容。

内能是系统状态的单值函数。从气体动理论的观点来说, 它是热力学系统内部, 所有分子热运动的能量及分子与分子间相互作用的势能的总和。一定质量的气体的内能为温度和体积的函数, 即  $E = E(T, V)$ , 对理想气体而言, 内能仅是温度的函数, 即  $E = E(T)$ 。物质的量为  $\nu$  的理想气体的内能为

$$E = \frac{M}{\mu} \frac{i}{2} RT \quad (8-4)$$

式中,  $i$  为分子自由度。注意: 内能为状态的单值函数, 热量和功为过程函数。

## 2. 热容量 摩尔热容

热力学系统在状态变化过程中温度升高 1K 所吸收的热量称为热容量, 表示为

$$C = \frac{dQ}{dT} \quad (8-5)$$

摩尔热容量是 1mol 的物质在状态变化过程中温度升高 1K 所吸收的热量。

理想气体的定容摩尔热容量  $C_{V,m}$  是 1mol 的理想气体在等体过程中温度升高 1K 所吸收的热量, 即

$$C_{V,m} = \frac{dQ_V}{dT} \quad (8-6)$$

理想气体的定压摩尔热容量  $C_{p,m}$  是所吸收的热量, 即

$$C_{p,m} = \frac{dQ_p}{dT} \quad (8-7)$$

$C_{V,m}$  和  $C_{p,m}$  的值一般由实验测得, 应用时可查实验手册。理想气体的  $C_{V,m}$  和  $C_{p,m}$  的理论值与它们的自由度有关, 为

$$C_{V,m} = \frac{dQ_V}{dT} = \frac{i}{2} R \quad (8-8)$$

$$C_{p,m} = \frac{dQ_p}{dT} = \frac{i}{2} R + R = C_{V,m} + R \quad (8-9)$$

可见,  $C_{p,m}$  与  $C_{V,m}$  之差为

$$C_{p,m} - C_{V,m} = R \quad (8-10)$$



式(8-10)称为迈耶公式,它的意义是,1mol的理想气体温度升高1K时,在等压过程中比在等体过程中要多吸收8.31J热量。

摩尔定压热容  $C_{p,m}$  与摩尔定体热容  $C_{V,m}$  之比,用  $\gamma$  表示,叫做(摩尔)热容比(绝热系数)。

$$\gamma = \frac{C_{p,m}}{C_{V,m}} = \frac{i+2}{i} \quad (8-11)$$

### 3. 分子热运动和统计规律

#### (1) 统计规律性

在分子热运动中,个别分子的运动(在动力学支配下)是无规则的,存在着极大的偶然性。但是,总体上却存在着确定的规律性(如理想气体的压强)。人们把这种支配大量粒子综合性质和集体行为的规律性称为统计规律性。

#### (2) 理想气体的压强公式

根据理想气体的力学假设和统计假设可以推导出理想气体的压强公式,该公式的推导有助于理解气体动理论的任务和研究方法。

理想气体压强公式:

$$p = \frac{1}{3}nm\overline{v^2} = \frac{1}{3}\rho\overline{v^2} = \frac{2}{3}n\overline{\varepsilon_k} \quad (8-12)$$

其中,  $\overline{\varepsilon_k} = \frac{1}{2}m\overline{v^2}$  为分子平均平动能。式(8-12)给出了宏观量  $p$  和微观量的统计平均值  $n$ 、 $k$  之间的关系。

#### (3) 温度的统计解释

由气体压强公式的结论,结合理想气体状态方程( $p = nkT$ )可以揭示温度的微观本质,即气体的温度是气体分子平均平动动能的量度。气体分子的平均平动动能与温度的关系为

$$\overline{\varepsilon_k} = \frac{1}{2}m\overline{v^2} = \frac{3}{2}kT \quad (8-13)$$

该式也称为能量公式,它表示宏观量温度  $T$  和微观量的平均值  $\overline{\varepsilon_k}$  之间的关系。温度从宏观上说是表征气体处于热平衡状态的物理量,从微观角度讲,温度  $T$  是气体分子平均平动动能的量度。它表征大量分子热运动的激烈程度,是大量分子热运动的统计平均结果,是一个统计量,温度对个别分子来说是没有意义的。

#### (4) 能量按自由度均分定理、理想气体的内能

在等概率原理的基础上理解能量均分定理。气体分子任一自由度的平均动能都等于

$\frac{1}{2}kT$ ，如果气体分子有  $i$  个自由度，则每个分子总平均动能为  $\frac{i}{2}kT$ 。能量按这样的原则分配，称为能量均分定理。

通常气体分子的总平均动能为

$$\varepsilon_k = \frac{1}{2}(t + r + 2s)kT \quad (8-14)$$

式中， $t$ 、 $r$ 、 $s$  分别表示分子的平动、转动和及分子间振动自由度。1mol 理想气体的内能为

$$E = \frac{i}{2}RT \quad (8-15)$$

质量为  $m$ （摩尔质量为  $M$ ）的理想气体的内能是

$$E = \frac{m}{M} \frac{i}{2}RT \quad (8-16)$$

#### 4. 麦克斯韦速率分布规律

##### (1) 速率分布函数

设  $N$  为一定质量气体的总分子数，气体分子的速率  $v$  可以连续地取零到无限大之间的任何数值，可以按速率的大小将速率分为若干个区间，而在任意（如  $v \sim v + dv$ ）区间的分子数为  $dN_v$ ，则  $dN_v / N$  表示在速率  $v \sim v + dv$  区间内分子数占总分子数的百分比，或者说分子处于该速率区间内的概率，当然这个百分比在任一区间内是不相同的，但比值  $dN_v / N$  与速率间隔的大小  $dv$  成正比，即有

$$\frac{dN_v}{N} = f(v)dv \quad (8-17)$$

式中， $f(v)$  称为速率分布函数，表示为

$$f(v) = \frac{dN_v}{N} \cdot \frac{1}{dv} \quad (8-18)$$

式（8-18）的物理意义是：气体分子在速率  $v$  附近，处于单位速率间隔内的概率；或者说，气体分子在速率  $v$  附近单位速率间隔内的分子数占分子总数的百分比，也叫概率密度。由式（8-18）对所有速率区间积分，得到分布在所有速率区间的分子数占总分子数百分比的总和为 1，即

$$\int_0^{\infty} f(v) dv = 1 \quad (8-19)$$

式（8-19）的意义是：在分子速率能够取值的整个速率区间内找到某个分子的概率是 100%，所有分布函数都满足这个条件，称为分布函数的归一化条件。

理想气体在不同温度下的分布曲线如图 8.2 所示, 由图可见, 具有很大或很小速率的分子数很少; 温度升高, 曲线的峰值右移, 即分子平均速率增大(系统的平均平动能增大)。

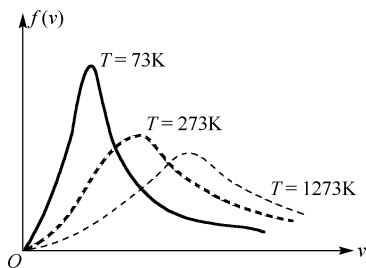


图 8.2 不同温度下理想气体的速率分布曲线

## (2) 麦克斯韦速率分布函数

麦克斯韦从理论上推导出了理想气体在平衡态下的速率分布函数, 形式为

$$f(v) = 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 \quad (8-20)$$

## (3) 麦克斯韦速率分布函数求 3 种统计速率

### ① 最概然速率 $v_p$ :

$$v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} = 1.414 \sqrt{\frac{RT}{\mu}} \quad (8-21)$$

### ② 平均速率 $\bar{v}$ :

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}} \approx 1.60 \sqrt{\frac{RT}{\mu}} \quad (8-22)$$

### ③ 方均根速率 $\sqrt{v^2}$ :

$$\sqrt{v^2} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} \approx 1.732 \sqrt{\frac{RT}{\mu}} \quad (8-23)$$

## \* (4) 玻尔兹曼分布规律

麦克斯韦速率分布是对理想气体而言的, 玻耳兹曼把它推广到气体分子在任一力场中运动的情况, 这种分布与麦克斯韦速率分布不同的是指数项中的能量(即考虑总能量  $E = E_k + E_p$ )除了动能以外, 还考虑了分子在力场中的势能, 且势能随位置而定。在考虑总能量情形下的分布结果称为玻耳兹曼分布。玻耳兹曼分布是个重要的规律, 它对实物微粒在不同力场中运动的情形都是正确的。目前对于微观世界的现象, 虽然必须用量子理论才能解释, 但经典统计可以看成是量子理论的极限近似, 在很多情况下还是与实

际近似相符的。例如，在分析半导体中载流子按能量分布问题时，一般情况下仍可采用经典统计结果。

### 5. 分子碰撞和平均自由程

在室温下气体分子的平均速率约为每秒几百米，但由于分子在运动过程中不断与其他分子碰撞而改变其运动方向，因而实际上分子的热运动是比较缓慢的。事实上，诸如气体的扩散、热传导等过程进行的快慢都取决分子相互碰撞的频繁程度。为了描述分子热运动的统计规律，人们引入分子的平均碰撞次数及平均自由程的概念。

① 平均自由程：两刚性分子每两次连续碰撞间一个分子自由运动的平均路程，数学公式为

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p} \quad (8-24)$$

式中， $d$  为分子直径， $n$  为分子数密度。

② 平均碰撞频率  $\bar{Z}$ ：单位时间内一个刚性气体分子与其他分子碰撞的平均次数。设除一个分子外其他分子都静止不动，只有那一个分子以平均相对速率  $\bar{v}_r$  运动，且单位体积内的分子数为  $n$ ，则所求运动分子在 1s 内与其他分子碰撞的平均碰撞频率  $\bar{Z}$  为

$$\bar{Z} = \pi d^2 \bar{v}_r n$$

利用麦克斯韦速率分布可求出，平均相对速率  $\bar{v}_r$  与算术平均速率的关系为  $\bar{v}_r = \sqrt{2}\bar{v}$ ，所以平均碰撞频率的数学形式为

$$\bar{Z} = \sqrt{2}\pi d^2 \bar{v} n \quad (8-25)$$

平均碰撞频率  $\bar{Z}$  与平均自由程  $\bar{\lambda}$  的关系为  $\bar{\lambda} = \frac{\bar{v}}{\bar{Z}}$ 。

平均自由程和平均碰撞频率是气体动理论中平的两个重要概念，借助于它们，人们可以不用速率分布函数，而对气体中的某些热现象作出相当简单而又成功的论证。

### \*6. 输运现象

当气体处于接近平衡态的非平衡态时，由于气体分子不断地碰撞和相互掺和，分子间将不断地交换动量和能量，使系统内的某些微观量从一处迁移到另一处，从而使气体内部原来存在的宏观量的不均匀趋向于均匀的现象，称为气体内部的迁移现象，也称为气体输运现象。气体的输运现象有 3 种：黏滞现象、热传导现象和扩散现象。这 3 种输运现象从宏观上看，都是由于气体内某些宏观量分布不均匀引起的。系统内的不均匀性程度可用梯度表示，输运的量都与梯度成正比，输运的结果总是企图逐步消除不均匀性，使气体由不

平衡态逐步趋向平衡态；从微观上看，输运现象是由分子热运动引起的，分子间不断碰撞，相互交换和使某种分子逐步由不均匀趋向于均匀。但是3种输运现象的原因、输运的量及输运的规律却不完全相同。

① 黏滞现象：流动气体中各气层的流速不相等，在两个相邻气层之间的接触面上，将形成阻碍气层相对运动的摩擦力，这个力称为黏性力，此现象称为黏滞现象。在黏滞现象中，不同气层中出现定向运动动量的迁移。

② 气体内各部分的温度不同，从温度较高处向温度较低处，将有热量传递，这一现象叫做热传导现象。在热传导现象中，不同气层中出现定向能量的迁移。

③ 同一种气体在容器中各部分密度不同，或容器中存在不同种类的气体，经过一段时间后，容器中各部分的成分以及气体的密度趋于均匀一致的现象，叫做扩散。在扩散现象中，不同气层中出现定向质量的迁移。

上述三种现象，在气体动理论中，利用分子碰撞的平均自由程概念，可以认为是气体分子在通过分界面  $dS$  前的最后一次碰撞，或平均地说，分子将发生在距离该分界面为  $\bar{\lambda}$  处的物理性质（动量、能量、质量）带到了分界面的另一侧。通过  $dS$  两侧物理量在交换上的差异，就可计算出转移的物理量，从而求出黏度系数  $\eta$ 、热传导系数  $K$ 、扩散系数  $D$  分别为

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \bar{v} \bar{\lambda} \quad (8-26)$$

$$K = \frac{1}{3} \frac{C_V}{\mu} \rho \bar{v} \bar{\lambda} \quad (8-27)$$

$$D = \frac{1}{3} \bar{v} \bar{\lambda} \quad (8-28)$$

## 7. 热力学第一定律

大量实验表明，对某一确定的系统，外界对它传递热量为  $Q$ ，系统从内能为  $E_1$  初始平衡态变化到内能  $E_2$  的终末平衡态，同时系统对外做功  $A$ ，那么，不论过程如何，总有

$$Q = \Delta E + A \quad (8-29a)$$

该式为热力学第一定律，式中， $Q > 0$  表示系统吸收热量， $Q < 0$  表示系统放出热量， $\Delta E (= E_2 - E_1) > 0$  表示系统内能增加， $\Delta E < 0$  表示系统内能减少， $A > 0$  表示系统对外做功， $A < 0$  表示外界对系统做功。

热力学第一定律的意义是：系统状态发生改变时，外界对系统传递热量，一部分使系统内能增加，另一部分供系统对外做功。热力学第一定律实际上是包括热量在内的能量守恒定律。对微小变化过程，第一定律的形式为

$$dQ = \Delta E + dA \quad (8-29b)$$

注意：①热力学第一定律是引入态函数（内能）的理论基础。②热力学第一定律表明第一类永动机是不可实现的。

8. 典型的热力学过程

把热力学第一定律应用到理想气体的几个重要准静态过程中，其各过程的主要公式见表 8-1。

表 8-1 理想气体热力学过程的主要公式

过程	特征	过程方程	吸收热量	对外做功 $A$	内能增量
等体	$V = \text{常量}$	$\frac{p}{T} = \text{常量}$	$\frac{m}{M} C_{V,m} (T_2 - T_1)$	0	$\frac{m}{M} C_{V,m} (T_2 - T_1)$
等压	$p = \text{常量}$	$\frac{V}{T} = \text{常量}$	$\frac{m}{M} C_{p,m} (T_2 - T_1)$	$p(V_2 - V_1)$ 或 $\frac{m}{M} C_{p,m} (T_2 - T_1)$	$\frac{m}{M} C_{V,m} (T_2 - T_1)$
等温	$T = \text{常量}$	$pV = \text{常量}$	$\frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1}$ 或 $\frac{m}{M} RT \ln \frac{p_1}{p_2}$	$\frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1}$ 或 $\frac{m}{M} RT \ln \frac{p_1}{p_2}$	0
绝热	$dQ = 0$	$pV^\gamma = \text{常量}$ $V^{\gamma-1}T = \text{常量}$ $p^{\frac{1}{\gamma-1}}T^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \text{常量}$	0	$-\frac{m}{M} C_{V,m} (T_2 - T_1)$ 或 $\frac{p_1 V_1 - p_2 V_2}{\gamma - 1}$	$\frac{m}{M} C_{V,m} (T_2 - T_1)$
*多方		$pV^n = \text{常量}$	$A + \Delta E$	$\frac{p_1 V_1 - p_2 V_2}{n - 1}$	$\frac{m}{M} C_{V,m} (T_2 - T_1)$

说明：

- ① 等容过程中，系统吸收的热量完全用来增加热力学系统的功。
- ② 等温过程中吸收的热量完全用来对外做功，而不用来增加热力学系统的内能。
- ③ 同一初始状态气体的绝热过程与等温过程相比，在变化相同体积时，压强下降更快，如图 8.3 所示。原因是绝热过程对外做功，依靠的是系统内能的减小，而压强减小既由于气体动量的减小，又由于气体密度的减小。等温过程对外做功，气体分子的动量依靠对外吸收热量保持不变，压强减小的原因仅由于气体分子密度的减小。

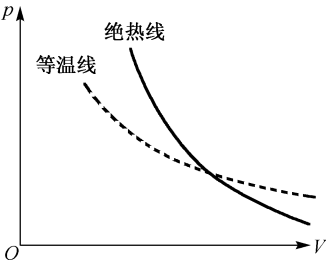


图 8.3 等温线与绝热线比较

## 9. 循环过程 卡诺循环

### (1) 循环过程

如果系统由某一状态出发, 经过任意的一系列过程, 最后又回到原来的状态, 这样的过程称为循环过程。

特点: 由准静态过程组成的循环过程, 在  $p \sim V$  图上可表示为一条闭合曲线; 系统经历一个循环过程后, 内能变化为  $\Delta E = 0$ 。

工作物质做正循环的机器叫热机。热机工作时从高温热源吸热  $Q_1$ , 对外做功  $A$  (净功), 同时向低温热源放热  $Q_2$ 。热机的效率为

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} \quad (8-30)$$

热机对外所做的功, 在数值上等于  $p \sim V$  图上闭合曲线所包围的面积。

工作物质做逆循环的机器叫制冷机。制冷机工作时, 它利用外界做功  $A$ , 使系统从低温热源吸热  $Q_2$ , 再向高温放热  $Q_1$ , 从而获得低温。制冷机的制冷系数为

$$\omega = \frac{Q_2}{A} = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2} \quad (8-31)$$

### (2) 卡诺循环

卡诺循环是指系统只和两个恒温热源进行热交换的准静态循环过程。卡诺循环由四个准静态过程组成, 其中两个等温循环过程, 两个绝热过程。

卡诺循环 (卡诺热机) 的效率为

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} \quad (8-32)$$

卡诺逆循环 (卡诺制冷机) 的致冷系数为

$$\omega = \frac{T_2}{T_1 - T_2} \quad (8-33)$$

式中,  $T_1$  是高温热源的温度,  $T_2$  是低温热源的温度。

## 10. 热力学第二定律

### (1) 热力学第二定律

热力学过程, 包括单一过程和循环过程, 二者都遵从热力学第一定律。大量事实表明, 有些过程能够自发实现, 有些过程则不能自发实现, 特别是那些自发实现过程的逆过程没有外界的帮助是不可能实现的。而热力学第二定律就是反映自然界过程进行的方向和条件, 它解决了物理过程进行的方向问题。

热力学第二定律有两种等价表述:

① 开尔文表述：不可能制造出一种循环工作的热机，只从单一热源吸收热量，使它完全转变为有用功，而不产生其他影响。

② 克劳修斯表述：热量不可能自动地从低温物体传向高温物体。

上述两种表述是等价的，违背了克劳修斯表述也就违背了开尔文表述，反之亦然。

热力学第二定律的统计解释：一切自然过程总是沿着无序性增大的方向进行。这也是不可逆性的微观本质。

## (2) 熵及熵增加原理

为了用数学形式表示热力学第二定律的微观本质，引入热力学概率的概念。将一个宏观态中所包含的微观态的数目称为这种宏观状态的热力学概率，用  $\Omega$  表示。自然过程沿着向  $\Omega$  增大的方向进行，平衡态相应于某一定宏观条件下热力学概率最大的状态。因此，热力学概率  $\Omega$  是分子热运动无序性大小的量度。

熵是为了判断孤立系统中过程进行方向而引入的系统状态的单值函数。若系统从状态 1 经历任一可逆过程变化到状态 2，其熵的变化  $\Delta S$  为

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T} \quad (8-34)$$

该式也称为克劳修斯熵公式。对于一个可逆循环，若系统从状态 1 经历一个不可逆过程变化到状态 2，为了计算在这个过程中系统的熵变，可以在状态 1 与状态 2 之间任意设想一个可逆过程，再利用式 (8-34) 计算其熵变。

熵增加原理：孤立系统内所进行的任何不可逆过程，总是沿着熵增加的方向进行，只有可逆过程，系统的熵变才为零，因而有

$$\Delta S \geq 0 \quad (8-35)$$

式 (8-35) 说明，一个开始处于非平衡态的孤立系统，必定逐渐向平衡态过渡，在此过程中熵要增加，最后达到平衡态时，系统的熵达到最大值。因此，用熵增加原理可判断过程进行的方向。

## (3) 玻尔兹曼熵关系式

自然界中一切自然发生的过程总是由概率小的宏观状态向概率大的宏观状态进行，即由包含微观状态数目少的宏观状态向包含微观状态数目多的宏观状态进行。

若用  $\Omega$  表示系统（宏观）状态所包含的微观状态数，或把  $\Omega$  理解为（宏观）状态出现的概率（热力学概率），则玻尔兹曼给出如下玻尔兹曼关系：

$$S = k \ln \Omega \quad (8-36)$$

式中， $k$  为玻尔兹曼常量。该式表明：熵是表示无序性或混乱度大小的。例如，对于系统的某一宏观状态，总有一个热力学概率  $\Omega$  值与之对应，因而也就有一个熵值与之对应。因此，熵是系统的单值函数，系统的状态确定了，熵也就完全确定了。



## 8.3 重点难点分析

### 1. 本章重点

深刻理解平衡态、准静态过程、体积功、热量、内能、循环过程、熵函数等概念；掌握热力学第一定律在几个典型过程中功、热量、内能改变量的计算方法和对具体循环过程的分析；深刻理解热力学第二定律及其统计意义；理解熵增加原理和熵的波尔兹曼表达式的意义。

在气体分子热运动的统计规律和统计研究方法的基础上理解压强、温度和内能概念及能量按自由度均分定理；掌握麦克斯韦速率分布律及 3 种统计速率的物理意义。

### 2. 本章难点

综合运用理想气体状态方程、内能的表达式和热力学第一定律对典型热力学过程和循环过程的分析；理解实际热力学过程进行具有方向性；掌握热力学第二定律及其统计意义；掌握态函数熵的定义及计算。

根据理想气体模型，运用统计的方法研究气体的宏观性质和规律，以及它们与分子微观量的平均值之间的关系，进而揭示这些性质和规律的本质。

## 8.4 精选例题分析

**例 8-1** 质量为  $M$  的氦气（视为理想气体），由同一初态经历下列两种过程：（1）等体过程；（2）等压过程。温度升高了  $\Delta T$ ，要比较这两种过程中气体内能的改变，有一种解答如下：

$$(1) \text{ 等体过程: } \Delta E_V = \frac{M}{\mu} C_V \Delta T;$$

$$(2) \text{ 等压过程: } \Delta E_p = \frac{M}{\mu} C_p \Delta T;$$

因为  $C_p > C_V$ ，所以  $\Delta E_p > \Delta E_V$ 。

以上解答是否正确？如有错误请改正。

**解：**等容过程的解答是正确的，等压过程的解答是错误的。

理想气体的内能是状态（温度）的单值函数，在准静态过程中， $\Delta E$  只与系统的始、末温度有关，与过程无关。上述两种过程中，初态相同， $\Delta T$  相同，故  $\Delta E$  也相同。即

$$(\Delta E)_p = (\Delta E)_V = (M / M_{\text{mol}}) C_V \Delta T$$

**例 8-2** 质量  $2.8 \times 10^{-3} \text{ kg}$ 、压强  $1 \text{ atm}$ 、温度  $27^\circ \text{C}$  的氮气，先在体积不变的情况下，使其压强增至  $3 \text{ atm}$ ，再经等温膨胀，使压强降至  $1 \text{ atm}$ ，然后又在等压（ $1 \text{ atm}$ ）下将其体积压缩

一半。试求氮在全部过程中的内能变化, 它所做的功和吸收的热量, 并把氮的状态变化过程在  $p \sim V$  图中图示出来。

分析: 可先确定氮在各个分过程中的初末状态, 然后在  $p \sim V$  图中图示氮的状态变化的全过程。

解: 如图 8.4 所示, 先将氮的初状态记作 I ( $p_1, V_1, T_1$ ), 其中  $p_1 = 1\text{atm}$ ,  $T_1 = 300\text{K}$ ,  $V_1$  待定, 再作 I  $\rightarrow$  II 等体过程图线, 等体过程的末状态记作 II ( $p_2, V_2, T_2$ ), 其中  $p_2 = 3\text{atm}$ ,  $V_2 = V_1$  与  $T_2$  均待定。由于过程 I  $\rightarrow$  II 是等体增压, 可见气体温度是升高的。现在, 先计算  $V_1$  和  $T_2$ , 对氮按理想气体考虑, 应用理想气体状态方程并由氮的摩尔质量  $\mu = 28 \times 10^{-3}\text{kg}$ , 得

$$V_1 = \frac{M}{\mu} \frac{RT_1}{p_1} = \frac{2.8 \times 10^{-3}}{28 \times 10^{-3}} \times \frac{8.31 \times 300}{1.013 \times 10^5} = 2.46 \times 10^{-3} \text{m}^3$$

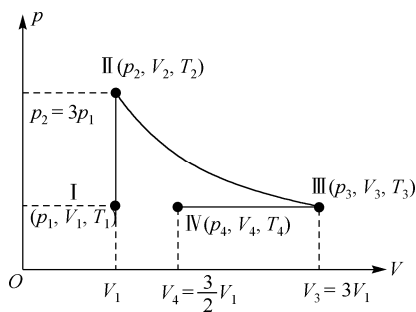


图 8.4 例 8-2 解图

在等体过程中, 由于  $p/T = \text{恒量}$ , 所以

$$T_2 = \frac{p_2}{p_1} T_1 = 3T_1 = 900\text{K}$$

氮从状态 II 经等温膨胀到达状态 III ( $p_3, V_3, T_3$ ), 其中  $p_3 = 1\text{atm}$ ,  $T_3 = T_2 = 900\text{K}$ ,  $V_3$  待定。由于是等温过程,  $pV = \text{恒量}$ , 所以  $p_2 V_2 = p_3 V_3$ , 又已知  $V_2 = V_1 = 2.46 \times 10^{-3} \text{m}^3$ , 于是算得

$$V_3 = \frac{p_2 V_2}{p_3} = 3V_2 = 7.38 \times 10^{-3} \text{m}^3$$

最后, 氮从状态 III 经等压压缩过程到达状态 IV ( $p_4, V_4, T_4$ ), 其中  $p_4 = p_3 = 1\text{atm}$ ,  $V_4 = V_3/2 = 3.69 \times 10^{-3} \text{m}^3$ ,  $T_4$  待定。因等压过程中  $V/T = \text{恒量}$ , 所以

$$T_4 = \frac{V_4 T_3}{V_3} = \frac{1}{2} T_3 = 450\text{K}$$

下面计算氮气经历  $I \rightarrow II \rightarrow III \rightarrow IV$  全过程时所做的功、吸收的热量及内能的变化，求出各分过程的  $A$ 、 $Q$  及  $\Delta E$ ，再把各分过程的  $A$ 、 $Q$  及  $\Delta E$  分别相加即可求得所需的结果。内能的增量也可由最初状态和最末状态直接求出，根据理想气体内能公式，有

$$\begin{aligned} E_4 - E_1 &= \frac{M}{\mu} C_V (T_4 - T_1) = \frac{M}{\mu} \frac{i}{2} R (T_4 - T_1) \\ &= \frac{2.8 \times 10^{-3}}{28 \times 10^{-3}} \times \frac{5}{2} \times 8.31 \times (450 - 300) = 312 \text{ J} \end{aligned}$$

式中， $C_V = \frac{i}{2} R$ （取  $i=5$ ）。

$I \rightarrow II$  是等体过程，所以

$$A_{I \rightarrow II} = 0$$

$$Q_{I \rightarrow II} = \Delta E_{I \rightarrow II} = \frac{M}{\mu} C_V (T_2 - T_1) = 0.1 \times 20.8 \times 600 = 1248 \text{ J}$$

$II \rightarrow III$  是等温膨胀过程，所以

$$(\Delta E)_{II \rightarrow III} = 0$$

$$A_{II \rightarrow III} = Q_{II \rightarrow III} = \frac{M}{\mu} R T_2 \ln \frac{V_3}{V_2} = 0.1 \times 8.31 \times 900 \times \ln 3 = 823 \text{ J}$$

$III \rightarrow IV$  是等压过程，因  $p_3 = p_4 = 1 \text{ atm}$ ，所以

$$A_{III \rightarrow IV} = p_3 (V_4 - V_3) = 1.013 \times 10^5 \times (-3.69 \times 10^{-3}) = -374 \text{ J}$$

或用公式  $A_{III \rightarrow IV} = \frac{M}{\mu} R (T_4 - T_3)$  计算，同样得到

$$A_{III \rightarrow IV} = \frac{M}{\mu} R (T_4 - T_3) = 0.1 \times 8.31 \times (-450) = -374 \text{ J}$$

$\Delta E_{III \rightarrow IV}$  和  $Q_{III \rightarrow IV}$  分别为

$$\Delta E_{III \rightarrow IV} = \frac{M}{\mu} R (T_4 - T_3) = 0.1 \times 20.8 \times (-450) = -936 \text{ J}$$

$$Q_{III \rightarrow IV} = \Delta E_{III \rightarrow IV} + A_{III \rightarrow IV} = -1310 \text{ J}$$

于是在  $I \rightarrow II \rightarrow III \rightarrow IV$  全过程中，有

$$A = A_{I \rightarrow II} + A_{II \rightarrow III} + A_{III \rightarrow IV} = 449 \text{ J}$$

$$Q = Q_{I \rightarrow II} + Q_{II \rightarrow III} + Q_{III \rightarrow IV} = 761 \text{ J}$$

由  $Q = A + \Delta E$ , 也可得到

$$E_4 - E_1 = Q - A = 312\text{J}$$

**例 8-3** 喷气发动机的循环可近似地用图 8.5 所示的  $a-b-c-d$  循环来表示, 试求其效率。

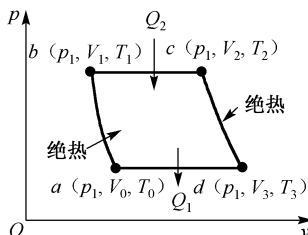


图 8.5 例 8-3 图

**解:** 由图 8.5 可见, 吸热和放热都是在等压过程中进行的, 因此有

$$Q_1 = \frac{M}{\mu} C_p (T_2 - T_1), \quad Q_2 = \frac{M}{\mu} C_p (T_3 - T_0)$$

于是可得喷气发动机效率为

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_3 - T_0}{T_2 - T_1}$$

此答案可利用绝热方程化简。由于  $p^{\gamma-1}T^{-\gamma} = \text{恒量}$ , 所以有

$$\frac{T_1}{T_0} = \left( \frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}, \quad \frac{T_2}{T_3} = \left( \frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

可得  $\frac{T_3}{T_0} = \frac{T_2}{T_1}$ , 代入上面  $\eta$  的表达式, 得到

$$\eta = 1 - \frac{T_3}{T_2} = 1 - \frac{T_0}{T_1}.$$

这就更便于进行数学运算了, 当然此式还可改用  $p_0/p_1$  或  $V_0/V_1$  来表示, 主要根据已知条件而定。

**例 8-4** 一容器体积为  $V_2$ , 用隔板分为  $A$ 、 $B$  两部分,  $A$  室装有物质的量为  $\gamma$  的理想气体, 初始温度为  $T$ , 体积为  $V_1$ ,  $B$  室为真空。迅速抽出隔板, 使气体向真空膨胀, 计算气体的熵变。

**解:** 此过程属于  $Q=0$ ,  $A=0$ ,  $\Delta E=0$  的一个可逆过程。由于熵是状态函数, 某一过程中的熵变只与始、末状态有关, 与过程可逆与否无关, 所以对于不可逆过程可以用可逆过程来替代计算其熵变。由于初、末态温度相同, 体积从  $V_1$  膨胀到  $V_2$ , 故可设想系统是经历一个准静态的等温膨胀过程。因为设想的过程是可逆的, 故有

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \int_1^2 \frac{dE + pdV}{T} = \int_1^2 \frac{pdV}{T} = \int_{V_1}^{V_2} \gamma R \frac{dV}{V} = \gamma R \ln \frac{V_2}{V_1} > 0$$

**例 8-5** 一个绝热容器被绝热板  $P$  分成体积相等的两部分，一边装有氮气，温度为 250K，另一边装有氧气，温度为 300K，两者压强相等，求去掉绝热板后，两种气体的混合温度？

**分析：**题目已知条件：混合前， $V_{\text{He}} = V_{\text{O}_2}$ ， $T_{\text{He}} = 250\text{K}$ ， $T_{\text{O}_2} = 310\text{K}$ ， $P_{\text{He}} = P_{\text{O}_2}$ ；要求解混合后温度  $T$ ，即求解混合气体的内能和温度。解题方法：已知混合前  $P$ 、 $T$ 、 $V$ ，求混合后温度  $T$ ，应用理想气体状态和内能公式求解。

**解：**混合前

$$P_{\text{He}} V = \nu_{\text{He}} R T_{\text{He}}$$

$$P_{\text{O}_2} V = \nu_{\text{O}_2} R T_{\text{O}_2}$$

$$\nu_{\text{He}} T_{\text{He}} = \nu_{\text{O}_2} T_{\text{O}_2}$$

且总内能

$$E_0 = E_{\text{He}} + E_{\text{O}_2} = \frac{3}{2} \nu_{\text{He}} R T_{\text{He}} + \frac{5}{2} \nu_{\text{O}_2} R T_{\text{O}_2} = \frac{8}{2} \nu_{\text{He}} R T_{\text{He}}$$

混合后，总内能

$$E = \frac{3}{2} \nu_{\text{He}} R T + \frac{5}{2} \nu_{\text{O}_2} R T = \left( \frac{3}{2} + \frac{5}{2} \frac{T_{\text{He}}}{T_{\text{O}_2}} \right) \nu_{\text{He}} R T$$

能量守恒气体混合前后的总内能不变，所以

$$\frac{8}{2} \nu_{\text{He}} R T_{\text{He}} = \left( \frac{3}{2} + \frac{5 T_{\text{He}}}{2 T_{\text{O}_2}} \right) \nu_{\text{He}} R T$$

两种气体的混合温度

$$T = \frac{8 T_{\text{He}}}{3 + 5 T_{\text{He}} / T_{\text{O}_2}} = \frac{8 \times 250}{2 + 5 \times 250 / 310} = 284\text{K}$$

**例 8-6** 两瓶不同的理想气体，它们的温度和压强都相等，但是体积不同，则它们分子数密度  $n$ 、质量密度  $\rho$  和单位体积内气体分子的平均动能  $\frac{E}{V}$  的关系为（ ）。

(A)  $n$  不同， $\rho$  不同， $\frac{E}{V}$  不同

(B)  $n$  同， $\rho$  相同， $\frac{E}{V}$  不同

(C)  $n$  相同， $\rho$  不同， $\frac{E}{V}$  相同

(D)  $n$  不同， $\rho$  相同， $\frac{E}{V}$  相同

**解：**两瓶不同种类的理想气体，它们的温度和压强都相同，但体积不同，则它们的分

子数密度  $n = \frac{p}{kT}$ , 故  $n$  相同; 质量密度  $\rho = \frac{\mu N}{V} = \mu n$ , 由于  $\mu$  不相同,  $N$  相同, 故  $\rho$  不同; 而单位体积内总的气体分子的平均平动动能  $\frac{E}{V} = \frac{N\bar{\epsilon}}{V} = n \frac{3kT}{2}$  相同。故选 (C)。

**例 8-7** 绝热容器被隔板分为两半: 一半是真空, 另一半是理想气体。若把板隔抽出, 气体将进行自由膨胀, 达到平衡后, ( )。

- (A) 温度不变, 熵增加                      (B) 温度升高, 熵增加  
(C) 温度降低, 熵增加                      (D) 温度不变, 熵不变

**解:** 在板隔抽出后, 气体将进行等温自由膨胀, 达到平衡后温度仍然不变; 根据熵增加原理: 当一个孤立的热力学系统, 从一平衡态绝热过程达到另一平衡态时, 如果过程是不可逆的, 它的熵的数值增加。所以选 (A)。

**例 8-8** 用总分子数  $N$ , 气体分子速率  $v$  和速率分布函数  $f(v)$  表示以下各量:

- (1) 速率大于  $v_0$  的分子数;  
(2) 速率大于  $v_0$  的那些分子的平均速率;  
(3) 多次观察某一分子的速率, 发现其速率大于  $v_0$  的概率。

**解:** (1) 由  $f(v) = \frac{dN}{Ndv}$  有

$$dN = f(v)Ndv$$

速率在  $v_0 \sim \infty$  区间的分子数为

$$\Delta N = \int dN = \int_{v_0}^{\infty} Nf(v) dv$$

(2) 由平均值公式

$$\bar{v} = \frac{\int v dN}{\Delta N} = \frac{\int v Nf(v) dv}{\Delta N} = \frac{\int_{v_0}^{\infty} v Nf(v) dv}{\int_{v_0}^{\infty} Nf(v) dv} = \frac{\int_{v_0}^{\infty} v f(v) dv}{\int_{v_0}^{\infty} f(v) dv}$$

(3) 概率

$$P = \frac{\Delta N}{N} = \frac{\int_{v_0}^{\infty} Nf(v) dv}{N} = \int_{v_0}^{\infty} f(v) dv$$

## 8.5 习题

8.1 关于热功转换和热量传递过程, 有如下一些叙述: ① 功可以完全变为热量, 而热量不能完全变为功; ② 一切热机效率都只能够小于1; ③ 热量不能从低温物体向高温物体传递; ④ 热量从高温物体向低温物体传递是不可逆的。以上叙述 ( )。

- (A) 只有②和④正确 (B) 只有②、③和④正确  
(C) 只有①、③和④正确 (D) 全部正确

8.2 如图 8.6 所示, 一定量理想气体从体积  $V_1$  膨胀到体积  $V_2$  分别经历的过程是:  $A \rightarrow B$  等压过程,  $A \rightarrow C$  等温过程,  $A \rightarrow D$  绝热过程, 其中吸热量最多的过程 ( )。

- (A) 是  $A \rightarrow B$   
(B) 是  $A \rightarrow C$   
(C) 是  $A \rightarrow D$   
(D) 既是  $A \rightarrow B$  也是  $A \rightarrow C$ , 两过程吸热一样多

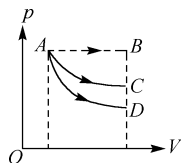


图 8.6 习题 8.2 图

8.3 压强、体积和温度都相同 (常温条件) 的氧气和氦气在等压过程中吸收了相等的热量, 它们对外做的功之比为 ( )。

- (A) 1:1 (B) 5:7 (C) 5:9 (D) 9:5

8.4 有人设计一台可逆卡诺机, 每循环一次可从 400K 的高温热源吸热 1800J, 向 300K 的低温热源放热 800J, 同时对外做功 1000J, 这样的设计是 ( )。

- (A) 可以的, 是符合热力学第一定律的  
(B) 可以的, 是符合热力学第二定律的  
(C) 不行的, 卡诺循环做的功不能大于向低温热源放出的热量  
(D) 不行的, 这个热机的效率超过理论值

8.5 设热源的绝对温度是冷源的绝对温度的  $n$  倍, 则在一个卡诺循环中, 气体交给冷源的热量是从热源得到的热量的 ( )。

- (A)  $n$  倍 (B)  $n-1$  倍 (C)  $\frac{1}{n}$  倍 (D)  $\frac{n+1}{n}$  倍

8.6 如图 8.7 所示, 在  $p \sim V$  图上有两条曲线  $abc$  和  $adc$ , 由此可以得出以下结论 ( )。

- (A) 其中一条是绝热线, 另一条是等温线  
(B) 两个过程吸收的热量相同  
(C) 两个过程中系统对外做的功相等  
(D) 两个过程中系统的内能变化相同

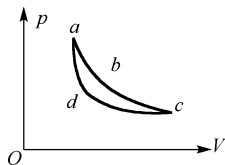


图 8.7 习题 8.6 图

8.7 “理想气体和单一热源接触做等温膨胀时, 吸收的热量全部用来做功。”对此说法, 有如下几种评论, 哪种是正确的?

- (A) 不违反热力学第一定律, 也不违反热力学第二定律  
(B) 不违反热力学第二定律, 但是违反热力学第一定律  
(C) 不违反热力学第一定律, 但是违反热力学第二定律  
(D) 不违反热力学第一定律, 也违反热力学第二定律

8.8 关于温度的意义, 有下列说法: (1) 气体的温度是分子平均动能的度量; (2) 气体的温度是大量气体分子热运动的集体表现, 具有统计意义; (3) 温度的高低反映物体内

分子剧烈程度；(4)从微观上看，气体的温度表示每个气体分子的冷热程度。上述说法正确的是( )。

- (A) (1) (2) (4) (B) (1) (2) (3)  
(C) (2) (3) (4) (D) (1) (3) (4)

8.9 有两瓶气体，一瓶是氦气，另一瓶是氮气，它们的压强相等，温度也相等，但是体积不同，则( )。

- (A) 单位体积内的气体的质量相等 (B) 单位体积内的原子数相等  
(C) 单位体积内的气体的分子数相等 (D) 单位体积内的气体的内能相等

8.10 设 $\bar{v}$ 代表气体分子运动的平均速率， $v_p$ 代表气体分子运动的最概然速率， $(\bar{v}^2)^{1/2}$ 代表气体分子运动的方均根速率。处于平衡状态下理想气体，三种速率关系为( )。

- (A)  $(\bar{v}^2)^{1/2} = \bar{v} = v_p$  (B)  $\bar{v} = v_p < (\bar{v}^2)^{1/2}$   
(C)  $v_p < \bar{v} < (\bar{v}^2)^{1/2}$  (D)  $v_p > \bar{v} > (\bar{v}^2)^{1/2}$

8.11 一容器内装有 $N_1$ 个单原子理想气体分子和 $N_2$ 个刚性双原子理想气体分子，当该系统处在温度为 $T$ 的平衡态时，其内能为( )。

- (A)  $(N_1+N_2)(\frac{3}{2}kT+\frac{5}{2}kT)$  (B)  $\frac{1}{2}(N_1+N_2)(\frac{3}{2}kT+\frac{5}{2}kT)$   
(C)  $N_1\frac{5}{2}kT+N_2\frac{3}{2}kT$  (D)  $N_1\frac{3}{2}kT+N_2\frac{5}{2}kT$

8.12 已知一定量的某种理想气体，在温度为 $T_1$ 与 $T_2$ 时的分子最概然速率分别为 $v_{p1}$ 和 $v_{p2}$ ，分子速率分布函数的最大值分别为 $f(v_{p1})$ 和 $f(v_{p2})$ 。若 $T_1>T_2$ ，则( )。

- (A)  $v_{p1} > v_{p2}$   $f(v_{p1}) > f(v_{p2})$  (B)  $v_{p1} > v_{p2}$   $f(v_{p1}) < f(v_{p2})$   
(C)  $v_{p1} < v_{p2}$   $f(v_{p1}) > f(v_{p2})$  (D)  $v_{p1} < v_{p2}$   $f(v_{p1}) < f(v_{p2})$

8.13 气缸中盛有一定量的氢气，当温度不变而压强增大1倍时，氢气分子的平均碰撞频率 $\bar{Z}$ 和平均自由程 $\bar{\lambda}$ 的变化情况是( )。

- (A)  $\bar{Z}$ 和 $\bar{\lambda}$ 都增加1倍 (B)  $\bar{Z}$ 和 $\bar{\lambda}$ 都减半  
(C)  $\bar{Z}$ 减半而 $\bar{\lambda}$ 增加1倍 (D)  $\bar{Z}$ 增加1倍而 $\bar{\lambda}$ 减半

8.14 在推导理想气体压强公式时，体现统计意义的两条假设是：(1)\_\_\_\_\_；(2)\_\_\_\_\_。

8.15 目前可获得的极限真空为 $10^{-13}$  mmHg的数量级，若气温为 $27^\circ\text{C}$ ，此时真空室内每立方厘米的空气分子数为\_\_\_\_\_。

8.16 根据能量按自由度均分原理，设气体分子为刚性分子，分子自由度数为 $i$ ，则当温度为 $T$ 时，一个分子的平均动能为\_\_\_\_\_，一摩尔氧气分子的转动动能总和为\_\_\_\_\_。

8.17 一定量的理想气体，从同一状态开始把其体积由 $V_0$ 压缩到 $V_0/2$ ，分别经历以下



三种过程：(1) 等压过程；(2) 等温过程；(3) 绝热过程。其中，\_\_\_\_\_外界对气体做功最多；\_\_\_\_\_气体放热最多；\_\_\_\_\_气体内能减少最多。

8.18 卡诺致冷机，其低温热源温度  $T_2 = 300\text{K}$ ，高温热源温度为  $T_1 = 450\text{K}$ 。每一循环从低温热源吸热  $Q_2 = 400\text{J}$ ，则该致冷机的致冷系数（ $A$  为外界做的功）\_\_\_\_\_，每一循环中外界对系统必须做功  $A = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

8.19  $2\text{mol}$  单原子理想气体，经一等容过程后，温度从  $200\text{K}$  升到  $500\text{K}$ 。若该过程为准静态过程，气体吸收的热量为\_\_\_\_\_，若该过程为不平衡过程，气体吸收的热量为\_\_\_\_\_。

8.20 在一个孤立系统内，一切实际过程都向着\_\_\_\_\_进行的，这是热力学第二定律的统计意义。从宏观上说，一切与热现象有关的实际的过程都是\_\_\_\_\_。

8.21 一定量的单原子分子理想气体，从 A 态出发经等压过程膨胀到 B 态，又经绝热过程膨胀到 C 态，如图 8.8 所示。试求全过程中气体对外所做的功，内能的增量以及吸收的热量。

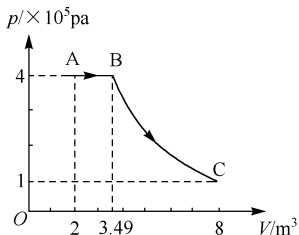


图 8.8 习题 8.21 图

8.22 有体积为  $2 \times 10^{-3} \text{m}^3$  的刚性双原子分子理想气体，其内能为  $6.75 \times 10^2 \text{J}$ ，求：(1) 气体的压强，(2) 假设气体分子数量为  $5.4 \times 10^{22}$ ，则气体分子的平均平动动能及温度分别为多少？

8.23 单原子分子的理想气体做卡诺循环，已知循环效率  $\eta = 20\%$ ，试求气体在绝热膨胀时，气体体积增大到原来的几倍？

8.24 真空管的线度为  $10^{-2} \text{m}$ ，真空度为  $10^{-5} \text{mmHg}$ ，分子有效直径为  $3 \times 10^{-10} \text{m}$ 。求在  $27^\circ\text{C}$  时，管内空气分子数密度、平均碰撞频率和平均自由程？

## 第9章 波动光学

光学是物理学中发展较早的一个分支学科，是物理学的重要组成部分。主要包括几何光学、波动光学、量子光学。本章主要介绍以光的波动性为基础的物理光学，称为波动光学。其主要内容包括光的干涉、衍射和偏振。

在光的干涉研究中，根据光的相干条件，提出获得相干光的原则，并讨论两类获得相干光的方法——分波阵面法和分振幅法，相应的以杨氏（T·Young）双缝干涉实验、薄膜干涉为重点讨论光的干涉现象，对干涉条件和干涉条纹的特点进行分析，并介绍用光学干涉显微镜测量薄膜厚度的应用。

在光的衍射研究中，从衍射现象入手介绍菲涅耳衍射和夫琅禾费衍射。以惠更斯“次波”概念、菲涅耳“次波”相干叠加的概念提出了惠更斯-菲涅耳原理。并在此基础上讨论光栅衍射的原理及光栅衍射的暗纹与明纹分布规律。最后讨论干涉和衍射的区别及联系。

光的偏振部分介绍了自然光与偏振光、起偏和检偏等概念，以及马吕斯定律，布儒斯特定律及双折射现象。

### 9.1 学习要求

#### 1. 光的干涉

（1）理解光源的发光机制，明确两个普通光源是不相干的；了解光的相干条件及获得相干光的方法。

（2）掌握光程及光程差的概念，掌握其计算方法；能够运用光程差的概念来分析干涉现象的相关问题；并能够判断在某些具体情况下是否存在半波损失；掌握半波损失的概念及产生条件。

（3）掌握几种典型的干涉实验（杨氏双缝干涉、洛埃德镜干涉）的基本装置及干涉条纹的分布特征、条纹位置的计算和一些科研的实际应用。

（4）了解迈克耳孙干涉仪的基本结构、工作原理及其应用；了解光学精密测量的基本方法。

#### 2. 光的衍射

（1）理解光的衍射现象，掌握惠更斯-菲涅耳原理；掌握夫琅禾费单缝衍射规律。

- (2) 掌握光栅衍射的原理及衍射条纹的成因, 能正确理解光栅方程。
- (3) 了解光栅衍射的暗纹与明纹分布规律, 并会分析和确定谱线位置。
- (4) 正确理解光的干涉和衍射的区别及联系。

### 3. 光的偏振

- (1) 理解自然光、偏振光、部分偏振光、起偏、检偏等概念。
- (2) 掌握马吕斯定律。
- (3) 理解反射和折射时光的偏振现象, 掌握布儒斯特定律。
- (4) 了解双折射现象。

## 9.2 内容提要

### 1. 基本概念

① 相干光: 一般光源不能产生干涉现象, 把能产生相干叠加的两束光称为相干光, 相干叠加必须满足振动频率相同、方向相同、相位差恒定的条件。两束相干光在交叠的区域里可看到干涉条纹。

② 从普通光源获得相干光的方法有两种: 一种是分波阵面法, 如杨氏实验、劳埃德镜实验; 另一种是分振幅法, 如薄膜干涉、等倾干涉、劈尖干涉、牛顿环等。

分波阵面法: 用单色光照射狭缝  $S$ ,  $S$  可视为单色线光源。 $S_1$ 、 $S_2$  为与  $S$  平行等距的狭缝。从  $S_1$ 、 $S_2$  发出的光是从  $S$  的同一波阵面分出的两束光, 因而是相干光。从波阵面上分离出两部分或更多部分作为初相相同的相干光源, 使之产生干涉, 如图 9.1(a) 所示。杨氏实验、劳埃德镜实验属于这类情况。

分振幅法: 利用光束 1 入射至薄膜上表面, 分成两部分, 一部分由上表面反射形成光束 2, 另一部分折射进入薄膜, 在其下表面又被反射, 再通过上表面折射出来, 形成光束 3。反射光束 2、光束 3 是由光束 1 分出来的, 所以是相干光, 如图 9.1(b) 所示。薄膜干涉实验属于此类。

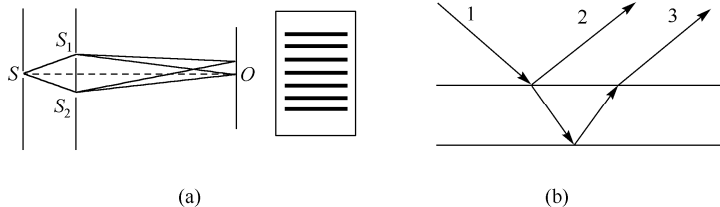


图 9.1 (a) 分波阵面法; (b) 分振幅法

- ③ 光程、光程差: 若光在折射率为  $n$  的均匀介质中传播, 通过的几何路程为  $l$ , 则把

$L = nl$  叫做光程。两束相干光的光程之差叫光程差。两束相干光的相位差为

$$\phi_{12} = \left( \omega t + \phi_1 - \frac{2\pi r_1}{\lambda_1} \right) - \left( \omega t + \phi_2 - \frac{2\pi r_2}{\lambda_2} \right) = 2\pi \frac{r_2}{\lambda_2} - 2\pi \frac{r_1}{\lambda_1} \quad (9-1)$$

光程差  $\Delta = n_2 l_2 - n_1 l_1$  与相位差  $\Delta\phi = \phi_{12}$  的关系为

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta \quad (9-2)$$

④ 半波损失：光学中将光从光疏（折射率小的）介质射向光密（折射率大的）介质，并在界面上反射时，反射波发生相位  $\pi$  的突变的现象称为半波损失。因而，在计算光程时，凡有半波损失的光波，都加上  $\lambda/2$  的光程，即相当于多走了半个波长。

⑤ 光的衍射现象：把波遇到障碍物时，它能绕过障碍物的边缘前进，光将偏离直线传播的现象叫做光的衍射。衍射和干涉一样也是波动的重要特征之一。

⑥ 衍射光栅：由平行等宽等间隔的多狭缝构成的衍射屏称为衍射光栅。设透射光栅的总缝数为  $N$ ，缝宽为  $a$ ，缝间不透光部分宽度为  $b$ ， $(a+b)$  称为光栅常数。当平行单色光垂直入射到光栅上，衍射光束通过透镜会聚在透镜的焦平面上，且在屏上几乎黑暗的背景上呈现出一系列又细又亮的明条纹，这种现象叫做光栅的衍射。

⑦ 惠更斯-菲涅耳原理：给定波阵面  $S$  上每一面元  $dS$  发出的子波，在波阵面前方某点  $P$  所引起的光振动的振幅大小与面积  $dS$  成正比，与面元到  $P$  点的距离  $r$  成反比，并且随面元法线与  $r$  间的夹角  $\theta$  增大而减小， $P$  点处的光强为整个波阵面上所有面元发出的子波在  $P$  点引起的光振动的总和。

衍射现象中出现的明暗条纹，正是从同一波阵面上发出的各子波相互干涉的结果。

⑧ 光的偏振：在与光的传播方向垂直的平面内， $\mathbf{E}$  矢量振动沿各个方向均相等的光为自然光；而只在某一固定方向有  $\mathbf{E}$  矢量振动的光为线偏振光，简称偏振光。介于两者之间的为部分偏振光。

## 2. 光的干涉

### (1) 干涉明暗条纹的条件

$$\Delta = \begin{cases} \pm k\lambda, & k = 0, 1, 2, \dots \quad \text{明纹中心} \\ \pm (2k+1)\frac{\lambda}{2}, & k = 0, 1, 2, \dots \quad \text{暗纹中心} \end{cases} \quad (9-3)$$

注意：必须根据具体干涉装置来选择正、负号及  $k$  的数值， $k$  并非都从零开始。处理光的干涉问题时，应先分析计算具体问题中相干光的光程差（注意有无半波损失），列出干涉明暗的具体条件，进而讨论干涉条纹分布规律。

### (2) 杨氏双缝干涉

如图9.2所示，由  $S_1$ 、 $S_2$  发出的光经  $r_1$ 、 $r_2$  到接收屏上  $P$  点的光程差是  $\Delta \approx r_2 - r_1 \approx d \sin \theta$ 。

式中  $\theta$  是  $P$  点的角位置, 即  $S_1 S_2$  的中垂线  $MO$  与  $MP$  之间的夹角, 在杨氏双缝干涉中,  $\theta$  很小, 因而  $\sin \theta \approx \tan \theta \approx \theta$ , 所以这两束光的光程差近似地表示为

$$\Delta \approx r_2 - r_1 \approx d \sin \theta \approx d \tan \theta = \frac{xd}{D}$$

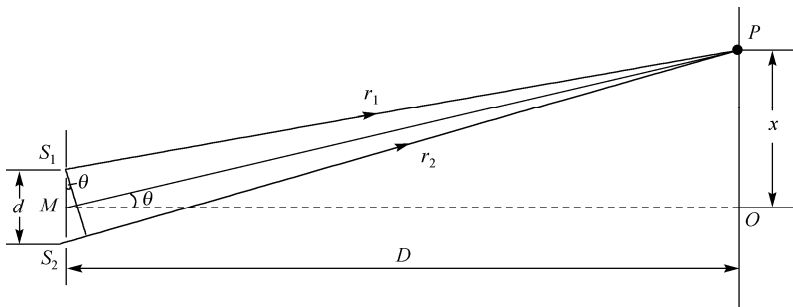


图 9.2 杨氏双缝干涉

所以,

$$\Delta = \begin{cases} \pm k\lambda, & k = 0, 1, 2, \dots \quad \text{明纹中心} \\ \pm (2k+1)\frac{\lambda}{2}, & k = 0, 1, 2, \dots \quad \text{暗纹中心} \end{cases}$$

故, 明纹中心位置为

$$x = \pm k \frac{D}{d} \lambda \quad (9-4)$$

当  $k=0$  时, 对应中央明纹; 当  $k=1$  时, 则对应上、下两侧第一级明纹。

暗纹中心位置为

$$x = \pm (2k+1) \frac{D}{d} \frac{\lambda}{2} \quad (9-5)$$

当  $k=0$  时, 对应上、下两侧第一级暗纹; 当  $k=1$  时, 对应第二级暗纹……

两相邻明纹(或暗纹)中心之间的距离为

$$\Delta x = x_{k+1} - x_k = \frac{D\lambda}{d} \quad (9-6)$$

讨论见例 9-1。

### (3) 劳埃德镜实验

原理图如图 9.3 所示。该实验装置是由一狭缝光源  $S_1$  发出的光波直接射到屏上和由虚光源  $S_2$  发出的光波掠射到  $MN$  的玻璃板上, 再经玻璃反射到达屏上,  $S_1$  和  $S_2$  构成一对相干光源, 对干涉条纹的分析与杨氏实验相同。

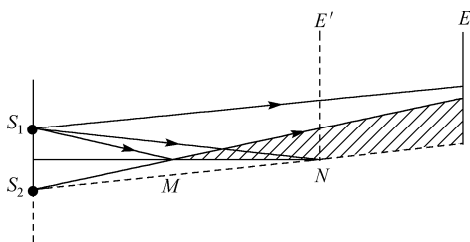


图 9.3 劳埃德镜实验原理图

#### (4) 薄膜干涉

薄膜干涉获得相干光的方法属于分振幅法，其原理如图 9.4 所示。由单色光源  $S$  上一点发出的光线在薄膜上、下两界面上分别反射形成的光束 2 和光束 3 两束平行光，经透镜  $L$  后会聚于  $P$  点。由于光束 2 和光束 3 是相干光，所以在  $P$  点会产生干涉现象。另一方面，光束 2 和光束 3 的能量是由光束 1 分出来的，由于光的能量与振幅有关，所以这种产生相干光的方法属于分振幅法。

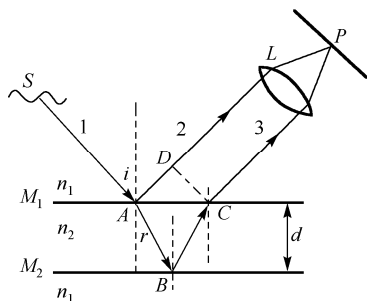


图 9.4 薄膜干涉获得相干光的方法

在  $P$  点干涉的加强与减弱取决于它们的光程差，注意计算光程差时考虑有无半波损失，如图 9.4 所示的光程差为

$$\Delta = 2d\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i} + \frac{\lambda}{2} = \begin{cases} k\lambda, & k=1,2,\dots \text{ 明纹中心} \\ (2k+1)\frac{\lambda}{2}, & k=0,1,2,\dots \text{ 暗纹中心} \end{cases} \quad (9-7)$$

当光垂直入射时 ( $i=0$ ) 有

$$\Delta = 2n_2d + \frac{\lambda}{2} = \begin{cases} k\lambda, & k=1,2,\dots \text{ 明纹中心} \\ (2k+1)\frac{\lambda}{2}, & k=0,1,2,\dots \text{ 暗纹中心} \end{cases} \quad (9-8)$$

注意以下几点：① 式 (9-7) 由  $\Delta = n_2(\overline{AB} + \overline{BC}) - n_1\overline{AD} + \frac{\lambda}{2}$  及折射定律  $n_1 \sin i = n_2 \sin r$  计算而得；② 光程差公式取正值，该公式不必死记硬背，可根据具体干涉装置求光程。

## \* (5) 劈尖干涉

如图 9.5 所示, 两平行玻璃片构成一劈尖, 如用平行光照射, 则相干光束①、②将在劈尖的上表面产生干涉条纹。明纹、暗纹的条件为 (相位跃变发生在劈的下表面)

$$\Delta = 2n_2e + \frac{\lambda}{2} = \begin{cases} k\lambda, & k=1,2,\dots \quad \text{明纹} \\ (2k+1)\frac{\lambda}{2}, & k=0,1,2,\dots \quad \text{暗纹} \end{cases} \quad (9-9)$$

明纹条件中  $k$  的起始值不能取零, 因为  $k=0$ , 则  $e<0$ , 厚度为负值, 无意义, 干涉条件是平行于棱边的等间距直条纹, 如图 9.5(b)所示, 这种情况下棱边处 ( $e=0$ ) 为暗纹。

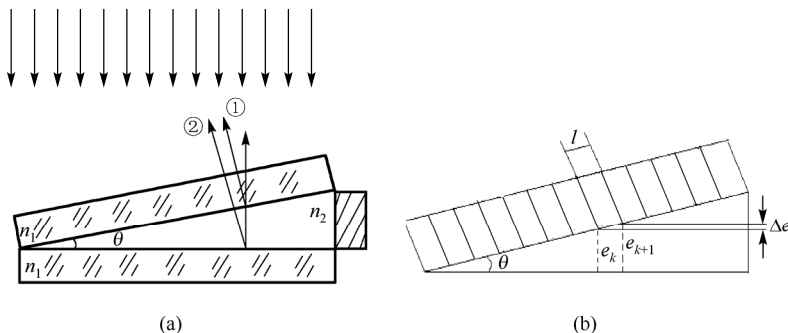


图 9.5 劈尖的干涉

两相邻明纹或暗纹处劈尖的厚度差为

$$\Delta e = e_{k+1} - e_k = \frac{\lambda}{2n_2} \quad (9-10)$$

两相邻明纹或暗纹距离为

$$l = \frac{\lambda}{2n_2 \sin \theta} \quad (9-11)$$

式 (9-10) 中第二等式是考虑了通常  $\theta$  很小, 有  $\sin \theta \approx \theta$  而得。条纹间距与劈尖  $\theta$  有关, 增大  $\theta$ , 条纹向棱边移动, 条纹间距变小, 条纹变密。当  $\theta$  增大到一定程度后, 条纹就密不可分了, 所以干涉条纹只能在劈小角度很小时才能观察到。

## \* (6) 牛顿环

如图 9.6 所示为牛顿环装置, 干涉条纹是以接触点为中心的同心圆环。图中平凸镜的曲率半径  $R$ 、牛顿环的半径  $r$  与厚度  $d$  的关系是

$$r^2 = 2Rd \quad (9-12)$$

干涉条纹的明环半径为

$$r = \sqrt{\left(k - \frac{1}{2}\right) \frac{R\lambda}{n_2}}, \quad k=1,2,3,\dots \quad (9-13)$$

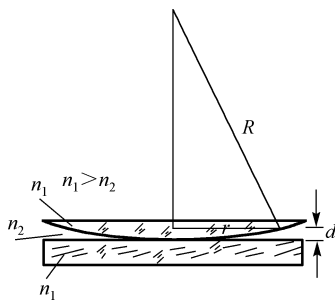


图 9.6 牛顿环装置示意图

暗环半径为

$$r = \sqrt{\frac{kR\lambda}{n_2}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (9-14)$$

### 3. 光的衍射

#### (1) 夫琅禾费单缝衍射

用单色平行光垂直入射在单缝上，在单缝后面放置一透镜，在透镜的焦平面上再放置一屏幕，则在屏幕上可以看到在中央明纹两侧对称地分布着明暗相间的各级条纹。

用半波带法可以直观形象地解释单缝衍射条纹分布的原理。如图 9.7 所示，单缝各点发出的子波在衍射角为  $\theta$  方向的最大光程差为  $AC = a \sin \theta$ 。把  $AC$  分成间隔为半波长 ( $\lambda/2$ ) 的  $N$  个相等部分，作  $N-1$  个平行于  $BC$  的平面，这些平面将把单缝上的波阵面切割成  $N$  个半波带。这样，相邻两波带上对应的点发出的子波的光程差总是  $\lambda/2$ ，它们到达  $P$  点时相互干涉抵消。可见，当  $N$  为偶数时，所有波带将成对地相互抵消，使  $P$  点出现暗纹；当  $N$  为奇数时，成对的波带抵消后还留下一个波带的作用，使点  $P$  出现明纹，若  $N$  不是整数，点  $P$  介于明暗之间。即

$$a \sin \theta = \pm k \lambda, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad P \text{ 点是暗纹中心} \quad (9-15)$$

$$a \sin \theta = \pm (2k + 1) \lambda / 2, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad P \text{ 点是明纹中心} \quad (9-16)$$

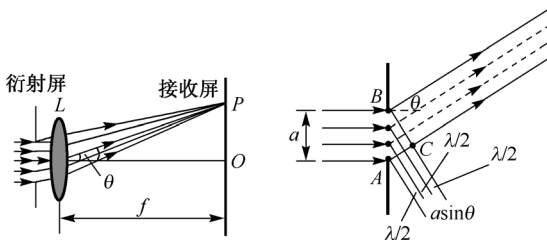


图 9.7 半波带法解释单缝衍射条纹分布的原理图



当  $\theta = 0$  时, 各衍射光光程差为零, 通过透镜后会聚在透镜的焦平面上, 这就是中央明纹的中心位置, 该处的光强最大。衍射角不同, 单缝处波阵面分出的半波带个数不同。而且  $AB$  一般也不能恰巧分成整数个半波带, 此时衍射光束形成介于最明和最暗的中间区域。

由式 (9-15) 可知, 当  $k=1$ ,  $-\lambda < a \sin \theta < \lambda$  时, 即为中央明纹区域。考虑到一般情况中的  $\theta$  角较小, 所以中央明纹的半角宽度为

$$\theta \approx \sin \theta = \frac{\lambda}{a}$$

式 (9-15) 中第  $k$  级与  $k+1$  级暗纹之间的角距离, 为第  $k$  级明纹的角宽度

$$\Delta \theta = \theta_{k+1} - \theta_k \approx \sin \theta_{k+1} - \sin \theta_k = \frac{\lambda}{a} \quad (9-17)$$

对于任意的其他衍射角  $\theta$ ,  $AB$  一般不会恰巧分成整数个半波带, 此时, 衍射光束形成介于最明和最暗的中间区域。单缝衍射条纹中, 光强分布并不是均匀的, 相对光强分布如图 9.8 所示。

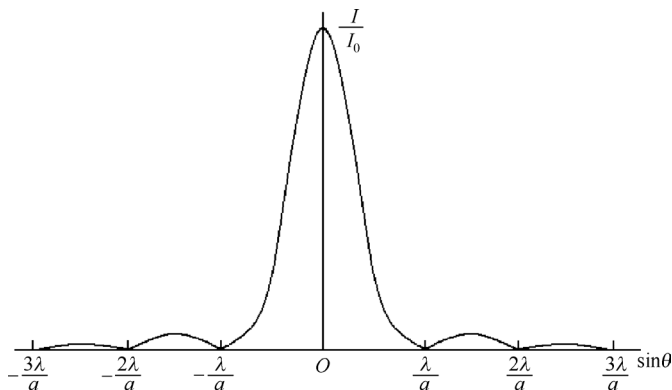


图 9.8 夫琅禾费单缝衍射条纹的光强分布

$\theta$  较小时, 中央明纹的宽度是其他明条纹宽度的两倍, 即中央明纹的半角宽度等于其他明纹的角宽度。

## (2) 夫琅禾费圆孔衍射与光学仪器的分辨率

将单缝衍射屏换为圆孔衍射屏, 接收屏上将得到夫琅禾费圆孔衍射图样。夫琅禾费圆孔衍射有助于分析光学成像系统的成像质量。

圆孔的零级衍射斑称为艾里斑, 其中心是几何光学像中心。衍射光角分布的弥散程度可用艾里斑的半角宽度表示, 对于直径为  $D$  的圆孔夫琅禾费衍射, 艾里斑的半角宽度为衍射斑中心到第一级极小的角距离, 第一级极小的角位置为

$$\sin \theta = 1.22 \frac{\lambda}{D} \quad (9-18)$$

当  $\theta$  很小时, 艾里斑的半角宽度为

$$\delta\theta \approx \sin\theta = 1.22 \frac{\lambda}{D} \quad (9-19a)$$

最小分辨角 (瑞利判据): 当一个艾里斑的中心刚好落在另一个艾里斑的边缘时, 就认为两个像刚好能够分辨, 把此时的艾里斑的半角宽度称为最小分辨角。即

$$\delta\theta = 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

按此规定可求出两物点的距离并将其作为光学仪器能分辨的两物点的最小距离, 以圆孔形物镜为例, 恰能分辨两点光源  $S_1$  和  $S_2$  的两衍射图样中心之间的距离, 应等于艾里斑的半径。此时  $S_1$  和  $S_2$  对仪器透镜光心的张角 (如图 9.9 所示) 为

$$\theta = 1.22 \frac{\lambda}{D} \quad (9-19b)$$

式中,  $\lambda$  是波长,  $D$  是透光孔径。可见, 对于无限远物点成像的圆孔光学系统, 其孔径越大, 则所能分辨开的两物点的角距离越小, 即分辨能力越强; 所用的光的波长越短, 分辨能力越强。

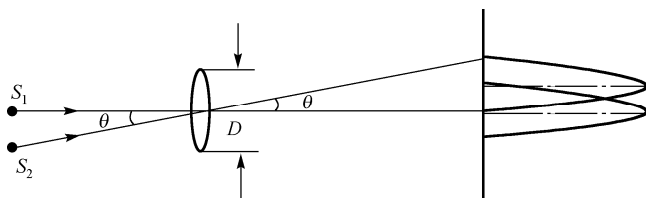


图 9.9 最小分辨角

在光学中, 常将光学仪器的最小分辨角的倒数称为仪器的分辨率, 即分辨率为  $1/\theta$ 。

### (3) 光栅衍射

光栅的每一狭缝可以看作是缝宽为  $a$  的单缝衍射, 其中每一个单缝衍射的衍射图样是重合的; 若把每一狭缝看作一个整体, 总缝数为  $N$  的衍射光栅又相当于  $N$  光束的干涉。因而, 光栅的衍射条纹应看作单缝衍射与  $N$  光束干涉的总效果。

若衍射角为  $\theta$ , 相邻两缝衍射光的光程差为  $\Delta = (a+b)\sin\theta$ , 各条缝的衍射光经透镜  $L_2$  会聚于  $p$  点, 如图 9.10 所示, 则  $p$  点的光振动是  $N$  个同方向、同频率、同振幅、相邻缝的光程差为  $\Delta$  的光振动的合成。若相邻缝的光程差等于波长的整数倍时,  $p$  点合振幅为单缝振幅的  $N$  倍, 由此得到  $p$  点为明纹的条件, 即满足

$$(a+b)\sin\theta = \pm k\lambda, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (9-20)$$

时, 光栅上的光束在  $p$  点相互加强呈现明纹, 把  $p$  点对应的明纹称为主极大。决定主极大

的方程式(9-20)就是光栅方程。式中,  $k=0$  的条纹叫中央明纹,  $k=1,2,\dots$  的明纹分别是第一级明纹、第二级明纹……正负号表示各级明纹对称分布在中央明纹两侧。

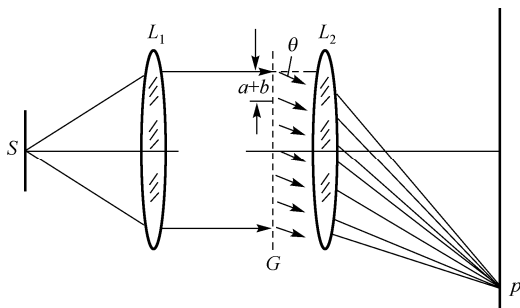


图 9.10 光栅衍射

光栅衍射的暗纹与次明纹分析: 若  $N$  条相干光束在屏幕上某点  $p$  的总相位差为  $2\pi$  或  $2\pi$  的整数倍, 这  $N$  个振幅矢量将构成一个首尾相连的封闭的正  $N$  边形或整数 ( $k'$ ) 个相同且相接的正多边形 (总边数为  $N$ ), 因而合振幅为零。故  $N$  光束干涉暗条纹的条件用相位差可表示为

$$\Delta\phi = \pm \frac{2k'\pi}{N}, \quad k' = 1, 2, \dots$$

而现知两个相邻狭缝的光振幅矢量间的相位差为  $\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}(a+b)\sin\theta$ , 将其代入上式, 则  $N$  光束矢量构成闭合图形时, 有干涉暗条纹的条件 ( $N\Delta\phi = \pm 2k'\pi$ ,  $k' = 1, 2, 3, \dots$  其中  $k' \neq 0$ ) 为

$$N(a+b)\sin\theta = \pm k'\lambda, \quad k' = 1, 2, \dots, N-1, N+1, \dots, 2N-1, 2N+1, \dots \quad (9-21)$$

式中  $k' \neq N, 2N, 3N, \dots$  是因为这已属于光栅方程 (见式 (9-20)) 规定的应出现主极大的情形。

由上述分析可知, 式 (9-20) 所给出的相邻的两明纹之间有  $N-1$  个暗条纹, 明纹的宽度由它相邻的两个暗纹中心位置决定,  $N$  越大, 明纹宽度越窄。而在两个暗纹之间又必定有一明纹, 故而由光栅方程规定的两明纹之间, 还有  $N-2$  个明纹, 其光强远小于主极大, 显得很弱, 称为次极大。事实上, 若  $N$  很大, 光栅衍射的暗纹和次明纹形成一片黑暗的背景, 正是由于这种特性, 使主极大占据的宽度很小, 而呈现出又亮又细的各级主明纹, 这给光谱观察带来极大的方便, 通常把这个光谱称为这个波长的光谱线。

从前面讨论可以知道, 光栅的明纹条件是

$$(a+b)\sin\theta = \pm k\lambda$$

而单缝衍射的暗纹条件是

$$a\sin\theta = \pm k''\lambda$$

所以当  $\frac{a+b}{a} = \frac{k}{k''}$  为整数比时, 发生缺级现象。例如,  $\frac{a+b}{a} = \frac{k}{k''} = \frac{3}{1}$  时, 就会出现缺级。即在  $k=3, 6, 9, \dots$  这些主明纹应该出现的地方, 实际上则观察不到。讨论见例题 9-3。

#### 4. X 射线衍射

如图 9.11 所示, 当一束 X 射线射到间距为  $d$  的两原子平面层的晶体上时, 散射波相互干涉加强的条件为

$$2d \sin \theta = k\lambda, \quad k=1, 2, 3, \dots \quad (9-22)$$

上式称为布拉格公式。

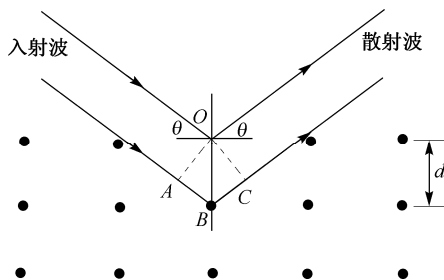


图 9.11 推导布拉格公式用图

#### 5. 光的偏振

##### (1) 自然光和偏振光

光是电磁波, 光的振动矢量  $\mathbf{E}$  与光的传播方向垂直。光振动矢量  $\mathbf{E}$  的振幅按统计平均来说沿各方向均等的光叫自然光。如果光振动矢量  $\mathbf{E}$  只沿某一方向振动, 这样的光称为线偏振光, 简称偏振光。光的振动方向和传播方向组成的平面称为振动面。由于线偏振光的光矢量保持在固定的振动平面内, 所以线偏振光又称为平面偏振光。

光的偏振态包括自然光、线偏振光、部分偏振光、椭圆偏振光、圆偏振光。

##### (2) 偏振光的起偏和检偏

从自然光获得偏振光的过程称为起偏。产生起偏作用的光学元件称为起偏器。偏振片是一种常用的起偏器。

两个平行放置的偏振片  $P_1$  和  $P_2$  (见图 9.12)。当自然光垂直照射  $P_1$  时, 透过的光成为线偏振光, 其振动方向平行  $P_1$  的偏振化方向, 强度  $I_1$  等于自然光强度  $I_0$  的  $1/2$ 。由  $P_1$  出来的线偏振光入射到  $P_2$  偏振片时, 出射光也为线偏振光, 这时如果让  $P_2$  沿垂直光轴平面缓慢旋转 (小于  $90^\circ$ ), 透过的光强度随  $P_2$  的旋转而变化, 当  $P_2$  偏振化方向与  $P_1$  的偏振化方向平行时, 出射光矢量的光强最强; 当  $P_2$  偏振化方向与  $P_1$  的偏振化方向垂直时, 出射光矢量的光强为零, 称为消光。利用这种现象, 可以识别入射光是否为偏振光, 这种识别偏振光的方法, 称为检偏。

### (3) 反射和折射时光的偏振

自然光入射到两种不同介质(折射率分别为 $n_1$ 、 $n_2$ )的分界面上反射或折射时,反射光和折射光都将成为部分偏振光,如图9.13(a)所示。实验表明:反射光的偏振化程度随着光的入射角变化而变化,在一特定入射角 $i_B$ 时反射光有可能成为完全偏振光,折射光为部分偏振光,如图9.13(b)所示。这个特定的入射角 $i_B$ 为布儒斯特角,也叫起偏角。

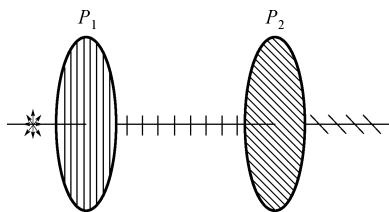
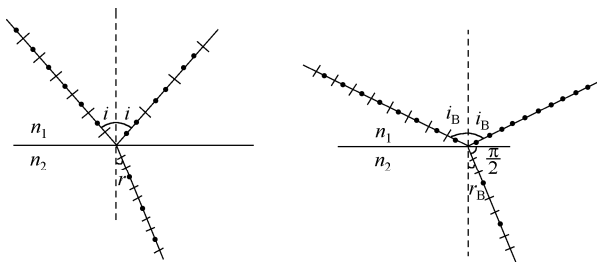


图 9.12 起偏和检偏



(a) 自然光反射和折射后产生部分偏振光

(b) 入射角为布儒斯特角

图 9.13 反射和折射时光的偏振

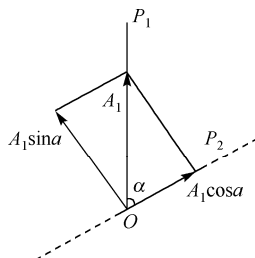
### (4) 基本定律

马吕斯定律:  $I = I_0 \cos^2 \alpha$ 。其中,  $I_0$  为入射偏振光的强度,  $\alpha$  为入射偏振光振动方向与出射偏振光振动方向之间的夹角, 如图9.14(a)所示。

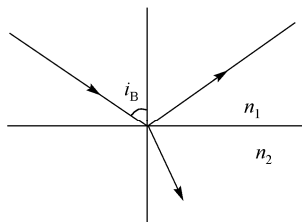
布儒斯特定律: 当自然光以布儒斯特角 $i_B$ (见图9.14(b))入射到折射率分别为 $n_1$ 和 $n_2$ 的两种介质的分界面上发生反射时, 产生线偏振光的条件是

$$\tan i_B = \frac{n_2}{n_1} = n_{21} \quad (9-23)$$

式中,  $n_{21} \left( = \frac{n_2}{n_1} \right)$  是介质2对介质1的相对折射率。



(a) 马吕斯定律



(b) 布儒斯特定律

图 9.14

## 6. 双折射现象

### (1) 寻常光和非常光

一束光射入各向异性的晶体后分成两束折射光的现象称为双折射。其中一束光遵从折射定律,称为寻常光,用  $o$  表示(简称  $o$  光);另一束不遵从折射定律,称为非常光,用  $e$  表示(简称  $e$  光)。

$o$  光和  $e$  光都是线偏振光,但  $e$  光折射线不一定在入射面内。 $o$  光在晶体内各方向上的传播速度相同,而  $e$  光的传播速度却随传播方向的变化而变化。

### (2) 光轴、单轴晶体、双轴晶体、主平面

光轴:在双折射晶体内有一特殊方向,光沿这个方向传播时将不发生双折射, $o$  光和  $e$  光沿该方向的折射率(或传播速度)相同,这一特殊方向称为光轴。注意:平行于此方向的直线均为光轴。

单轴晶体:只有一个光轴的晶体。如方解石、石英等。

双轴晶体:有两个光轴的晶体。如云母、硫磺等。

主平面:晶体中光的传播方向与晶体光轴构成的平面。注意:一般情况下, $o$  光主平面与  $e$  光主平面不重合。

### (3)\* 人为双折射

① 以人为(外界)条件使某些非晶体变成各向异性,从而显示出双折射性质,称为人为双折射。

② 各向同性的材料在机械效应力作用下,显示光学上的各向异性,产生双折射现象,称为光弹效应,也叫机械双折射或应力双折射。

③ 在外磁场作用下,某些非晶体也会显示出双折射性质,称为人为磁致双折射效应。

### (4)\* 旋光现象

旋光性:当线偏振光通过某些透明物质时,其振动面将以光的传播方向为轴线旋转一定的角度,这种现象称为旋光性。不同物质可以使偏振光的振动面向不同的方向旋转(有左旋和右旋之分)。

### (5)\* 光与物质的相互作用

光在介质中的传播过程,就是光与介质相互作用的过程。光的吸收、散射和色散是光在介质中传播时所发生的普遍现象,并且它们是相互联系的。

## 9.3 重点难点分析

### 1. 本章重点

光的干涉和衍射,波的基本特征;光的相干性、光程差的概念;通过计算各种情况下相干光束的光程差以及某些原因引起的光程差的改变量,从而确定明、暗条纹的位置;干涉条纹的特征及条纹的移动和变化;用波带法解释单缝衍射条纹的分布及其原理。

## 2. 本章难点

难点主要有干涉问题的一般分析方法和几种典型情况下光的干涉和衍射的光程差的计算方法, 运用处理干涉问题的基本理论解释和分析干涉的现象和规律。理解这类问题的关键是弄清楚光程差的概念, 光的干涉和衍射本质上都是光波的相干叠加, 而相干叠加的强弱取决于相位差, 光在介质中通过路程  $L$  时, 所引起的相位变化相当于光在真空中通过  $nL$  路程时所产生的相位变化,  $nL$  就是光程, 光程差即两束光到达相遇点的光程之差, 相位差取决于光程差 ( $\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta$ ), 所以, 引入光程和光程差是为了讨论相干强弱条件, 进而分析干涉和衍射图样。光程差的计算要在确定参与相干叠加的光线的基础上, 由几何关系计算光线通过的路径长度, 乘以各通过区域的折射率的总和, 即得该光线的光程, 从而可写出相应两光线的光程差的表达式, 计算光程差时特别要注意分析有无相位跃变, 即有无半波损失存在。

## 9.4 精选例题分析

**例 9-1** 如图 9.15 所示, 在双缝干涉实验中, 用波长  $\lambda = 550\text{nm}$  的单色平行光垂直入射到缝间距  $d = 2 \times 10^{-4}\text{m}$  的双缝上, 屏到双缝的距离  $D = 2\text{m}$ 。

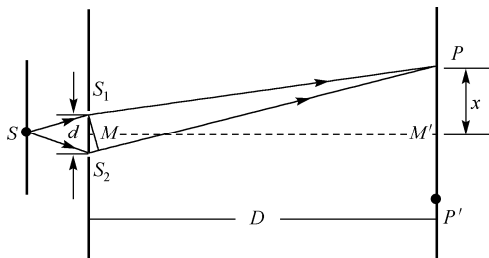


图 9.15 例 9-1 图

- (1) 求中央明纹两侧的①两条第 10 级明纹中心的间距; ②光从  $S_1$ 、 $S_2$  到点  $P$  的光程差;
- (2) 用很薄的云母片 ( $n = 1.58$ ) 覆盖在双缝实验中的一条缝上, 屏上的零级明条纹移动到原来的第 7 级明纹的位置上, 求云母片的厚度;
- (3) 若将其中一条缝盖住, 在对称轴上放一反射镜  $M$ , 则在原第 10 级明纹处点  $P$  处有无干涉? 若有, 是明的还是暗的?

**解:** (1) ①因为两相邻明(暗)条纹的间距为  $\frac{D\lambda}{d}$ , 共 20 个间距, 所以

$$x = 20 \frac{D\lambda}{d} = 0.11\text{m}$$

②光从  $S_1$ 、 $S_2$  到点  $P$  的光程差为

$$\Delta = k\lambda = 20 \cdot 550 \times 10^{-9} = 1.1 \times 10^{-5} \text{ m}$$

(2) 设云母片的厚度为  $e$ ，则由光程差计算，无云母片时，第 7 级明条纹对应光程差满足

$$\Delta_7 = \frac{x_7 d}{D} = 7\lambda$$

有云母片时，原第 7 级明纹的光程差为

$$\Delta'_7 = \frac{x_7 d}{D} - (n-1)e$$

因零级明条纹移到原来的第 7 级明纹的位置上，所以

$$\Delta'_7 = \frac{x_7 d}{D} - (n-1)e = 0$$

即

$$(n-1)e = 7\lambda$$

故

$$e = 7 \frac{\lambda}{(n-1)} = 6.64 \times 10^{-6} \text{ m}$$

注意：该问题也可根据光程差变化引起条纹级次变化计算。

(3) 图中经过  $S_1$  的光线经  $M$  反射到点  $P$  两相干光叠加后，在点  $P$  处也产生干涉条纹。此时，两相干光在点  $P$  的相位差与 (1) (②光从  $S_1$  和  $S_2$  到点  $P$  的光程差) 中相比相差  $\pi$  (反射时的相位突变)，所以，此时点  $P$  处是暗条纹。

**例 9-2** 已知某波长为 9.0cm 的高频声波穿过一宽度为 12.0cm 的狭缝，一麦克风位于狭缝的中点  $A$  前 40.0cm 处的  $O$  点。如图 9.16 所示，现将麦克风沿垂直于  $AO$  连线的方向移动，试问：麦克风移动到何处，将接收不到声音的信号？

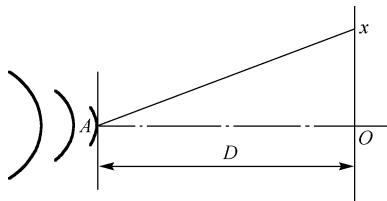


图 9.16 例 9-2 图

分析：麦克风接收不到信号处即为单缝衍射暗纹位置，因此本题要计算的是单缝衍射的暗纹位置。



**解：**已知  $\lambda = 0.09 \text{ m}$ ,  $b = 0.120 \text{ m}$ ,  $D = 0.4 \text{ m}$  接收不到信号是由于声波衍射的结果, 单缝衍射的暗纹公式为

$$b \sin \theta = k \lambda$$

接收不到声音信号的坐标位置  $x$  应正好位于暗纹处, 因此

$$x = D \tan \theta = \frac{D \sin \theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}} = \frac{D}{\sqrt{\frac{1}{\sin^2 \theta} - 1}} = \frac{D}{\sqrt{\frac{b^2}{k^2 \lambda^2} - 1}}$$

将数值代入上式, 当  $k=1$  时, 有

$$x = \frac{0.4}{\sqrt{\frac{0.120^2}{0.09^2} - 1}} = 0.454 \text{ m}$$

当  $k > 2$  时, 根号中出现负值, 无意义。

**例 9-3** 波长为  $600 \text{ nm}$  的单色光垂直入射在光栅上, 第 2、3 级明纹分别出现在  $\sin \theta = 0.20$  和  $0.30$  处, 第 4 级缺级。试求: (1) 光栅上相邻两缝间距是多少? (2) 光栅上狭缝的宽度有多大? (3) 按上述选定的  $a$ 、 $b$  值, 在整个光屏上, 实际呈现的全部级数为哪些?

**分析：**根据光栅衍射公式  $(a+b) \sin \theta = k \lambda$  计算。

**解：**(1) 依题意,  $k=2$  时,  $\sin \theta = 0.20$ , 故光栅上相邻两缝的间距为

$$(a+b) = \frac{2\lambda}{\sin \theta} = 6 \times 10^{-3} \text{ mm}$$

(2) 光栅衍射明条纹第 4 级缺级时, 有

$$(a+b) \sin \theta = 4\lambda$$

由单缝暗纹公式

$$a \sin \theta = k' \lambda \quad (k' = 1, 2, \dots)$$

由此得  $\frac{a+b}{a} = \frac{4}{k'}$ , 因  $\frac{a+b}{a} > 1$ , 故  $k'$  只能取 1, 2, 3。从而

$$\frac{a+b}{a} = 1, 2, \frac{4}{3}$$

但由缺级条件

$$(a+b) \sin \theta = k \lambda$$

$$a \sin \theta = k' \lambda$$

可知, 若  $(a+b)/a = 2$ , 则第 2 级明纹必定缺级, 所以,  $(a+b)/a$  只能取 4 或  $4/3$ , 即

$$(a+b)/a=4 \quad \text{或} \quad (a+b)/a=4/3$$

由此得狭缝的宽度为

$$a = \frac{1}{4}(a+b) = 1.5 \times 10^{-6} \text{ m}$$

或

$$a = \frac{3}{4}(a+b) = 4.5 \times 10^{-6} \text{ m}$$

(3) 在  $0 < \theta < 90^\circ$  的范围内, 因光栅公式为

$$(a+b)\sin\theta = k\lambda \quad (k=0,1,2,\dots)$$

$$k < \frac{a+b}{\lambda} = 10$$

因  $k$  为整数, 所以  $k=0,1,2,\dots,9$ 。由此可知, 无论  $a$  取何值, 在  $-90^\circ < \theta < 90^\circ$  的范围内, 可能出现的明条纹级为  $k=0,\pm1,\pm2,\dots,\pm9$ 。但是, 由缺级条件可知, 在单缝衍射第  $k'$  级暗纹处缺级时, 有

$$\frac{a+b}{a} = \frac{k}{k'}$$

若取  $a = \frac{1}{4}(a+b)$ , 则

$$k = \frac{a+b}{a}k' = 4k' \quad (k'=\pm1,\pm2,\dots)$$

因此, 当  $k=\pm4,\pm8$  时出现缺级, 故在屏幕上呈现的全部级次只有  $k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\pm5,\pm6,\pm7,\pm9$ 。

若取  $a = \frac{3}{4}(a+b)$ , 则

$$k = \frac{a+b}{a}k' = \frac{4}{3}k'$$

因  $k$  和  $k'$  均为整数, 故  $k=\pm4,\pm8$  时缺级, 可见屏幕上的全部级次与  $a = \frac{1}{4}(a+b)$  时相同, 但两者的光强分布不相同。

**例 9-4** 一束平行自然光以  $58^\circ$  角入射到平面玻璃表面上, 反射光束是完全偏振光, 求:

(1) 透射光束的折射角为多大?

(2) 玻璃的折射率为多大?

分析: 当反射光为线偏振光时, 入射角  $i$  与折射角  $r$  之和等于  $90^\circ$ , 由此可以求得折射角, 进一步根据布儒斯特定律可得到玻璃的折射率。

**解:** (1) 透射光束的折射角为

$$r = 90^\circ - i = 32^\circ$$

(2) 空气折射率为  $n_1 = 1.00$ 。由布儒斯特定律可计算得

$$n_2 = n_1 \tan \phi = 1.99 \tan 58^\circ = 1.60$$

### 例 9-5 试分析光的干涉与衍射的区别

分析：如果从光波相干叠加，引起光强度的重新分布、形成稳定图样角度来看，干涉和衍射并不存在实质性的区别。

通常习惯上把有限光束的相干叠加称为干涉。而把从同一波阵面上各点发出的无数个子波（球面波）的相干叠加称为衍射；

如果参与相干叠加的各光束是按几何光学直线传播的，这种相干叠加是纯干涉问题，如薄膜干涉，这种情形下不同级次的光强是一样的。而衍射条纹不同级次的光强不同，级次高（ $k$  越大）光强越弱。

如果参与相干叠加的各光束的传播不符合几何光学模型，每一光束存在明显的衍射，这种情形中干涉和衍射是同时存在的，如杨氏双缝等分波阵面的干涉。在存在衍射的情况下，干涉条纹要受到衍射的调制。在杨氏双缝实验中，缝宽不同，则调制情况也不同，当缝宽很小时，单缝衍射的中央明亮区的衍射范围很大，是其他各级条纹的两倍；而双缝干涉条纹是等间距的；

在杨氏双缝情况下讨论缝间干涉时，无需考虑衍射对干涉条纹的调制，故称为双缝干涉。而把缝宽不是很小时形成的干涉条纹不等强度分布的情形，称为双缝衍射。

对于单缝衍射，明、暗的条件与干涉恰好相反，分别为

$$\text{干涉:} \quad \Delta = \pm(2k+1)\frac{\lambda}{2} \quad \text{暗条纹}$$

$$\text{单缝衍射:} \quad \Delta = a \sin \theta = \pm(2k+1)\frac{\lambda}{2} \quad \text{明条纹}$$

这是因为前者两束相干光光程差为半波长的奇数倍时，两束光波相位相反，干涉减弱；而后者，在衍射角  $\theta$  的方向上，无数多条衍射光线的最大光程差为半波长的奇数倍时，单缝能分成奇数个半波带，相邻两波带上对应的衍射光彼此相消后，最后剩下一个波带的衍射光不能相消，故得明纹。

**例 9-6** 在迈克耳孙干涉仪的一条臂中，沿着臂长方向放置一根长为 3.00cm 的真空管，真空管两端为透明玻璃。现向管内慢慢充入某种气体，直至管内气体的压强为 1 个大气压。在此过程中发现有 35 条明纹在屏上移过，求气体的折射率。（设干涉仪所用单色光的波长为 633nm。）

分析：35 条明纹的移动是由于真空管充气以后引起了光程差的改变而形成的。考虑到光线来回两次通过管子，因此光程差的改变为  $2(n-1)d$ ，其中， $n$  为气体的折射率， $d$  为管长。

解：光程差等于一个波长时，将有一条明纹的移动，现观察到有 35 条明纹的移动，则满足题意的干涉条件为

$$2(n-1)d = 35\lambda$$

则气体的折射率为

$$n = \frac{35\lambda}{2d} + 1 = \frac{35 \times 633 \times 10^{-9}}{2 \times 3.00 \times 10^{-2}} + 1 = 1.000369$$

## 9.5 习题

9.1 在双缝干涉实验中，波长  $\lambda = 500\text{nm}$  的单色光入射在缝间距  $d = 2 \times 10^{-4}\text{m}$  的双缝上，屏到双缝的距离为  $2\text{m}$ ，则

(1) 每条明纹的宽度是 ( )。

(A)  $5 \times 10^{-3}\text{m}$  (B)  $5 \times 10^{-2}\text{m}$  (C)  $3 \times 10^{-2}\text{m}$  (D)  $0.1\text{m}$

(2) 中央明纹两侧的两条第 10 级明纹中心的间距是 ( )。

(A)  $5 \times 10^{-3}\text{m}$  (B)  $5 \times 10^{-2}\text{m}$  (C)  $3 \times 10^{-2}\text{m}$  (D)  $0.1\text{m}$

(3) 若用一厚度为  $e = 6.6 \times 10^{-6}\text{m}$  的云片覆盖其中一条缝后，零级明纹移到原来的第 7 级明纹处，则云母的折射率是 ( )。

(A) 1.5 (B) 1.53 (C) 1.64 (D) 2

9.2 一折射率为 1.64 的直角玻璃棱镜，如图 9.17 所示，光线垂直入射到  $AB$  面，为使其在  $AC$  面上发生全反射，则

(1) 将此镜置于空气中时角  $\alpha$  的最大值是 ( )。

(A)  $35.81^\circ$  (B)  $< 90^\circ$  (C)  $52.43^\circ$  (D)  $45^\circ$

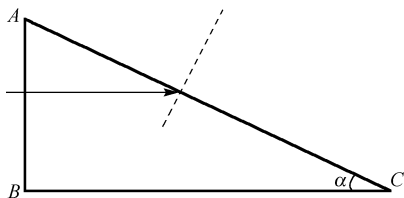


图 9.17 习题 9.2 图

(2) 将此镜置于折射率为 1.33 水中时角  $\alpha$  的最大值是 ( )。

(A)  $< 90^\circ$  (B)  $35.81^\circ$  (C)  $52.43^\circ$  (D)  $60^\circ$

9.3 折射率为 1.30 的油膜覆盖在折射率为 1.50 的玻璃片上，用白光垂直照射油膜，观察到波长  $\lambda = 500\text{nm}$  的绿色透射光加强，则油膜的最小厚度是 ( )。

(A)  $83.3\text{nm}$  (B)  $250\text{nm}$  (C)  $192.3\text{nm}$  (D)  $96.2\text{nm}$

9.4 在单缝夫琅禾费衍射实验中, 波长为  $\lambda$  的单色光垂直入射在宽度为  $3\lambda$  的单缝上, 对应于衍射角为  $30^\circ$  的方向, 单缝处波阵面可分成的半波带数目为 ( )。

- (A) 2 个                      (B) 3 个                      (C) 4 个                      (D) 6 个

9.5 一直径为  $2\text{mm}$  的氦氖激光束射向月球表面, 其波长为  $632.8\text{nm}$ 。已知月球和地面的距离为  $3.84 \times 10^5 \text{km}$ 。则在月球上得到的光斑的直径为\_\_\_\_\_; 如果这激光束经扩束器扩展为  $2\text{m}$ , 则在月球表面上得到的光斑的直径为\_\_\_\_\_。

9.6 光强为  $I_0$  的自然光垂直通过两个偏振片后, 出射光强  $I = I_0 / 8$ , 则两个偏振片的偏振化方向之间的夹角为\_\_\_\_\_。

9.7 已知一球面凹镜的曲率半径为  $102.8\text{cm}$ , 一块平凸透镜的凸面放在凹面上, 如图 9.18 所示, 如果用波长为  $589.3\text{nm}$  的钠光照射, 可观察到牛顿环, 并测得第 4 级暗环的半径为  $2.250\text{cm}$ 。求平凸透镜的曲率半径。

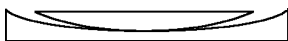


图 9.18 习题 9.7 图

9.8 在如图 9.19 所示的几种入射情况中, 画出折射光和反射光, 并用点和短线表示其振动方向。图中,  $i_0 = \arctan n$ ,  $i \neq i_0$ 。

9.9 一射电望远镜的天线设在湖岸上, 距湖面高度为  $h$ , 对岸地平线上方有一恒星刚刚升起, 恒星发出的波长为  $\lambda$  的电磁波。如图 9.20 所示, 试求当天线测得第 1 级干涉极大时恒星所在的角位置  $\theta$  (作为洛埃德镜分析)。

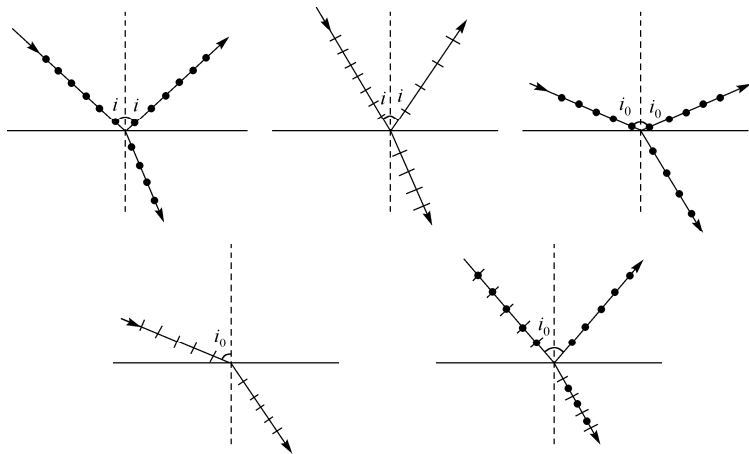


图 9.19 习题 9.8 图

9.10 用波长  $\lambda = 632.8\text{nm}$  的氦氖激光光源垂直照射光栅。已知第 1 级明纹出现在  $30^\circ$  的方向上, 则 (1) 光栅常量是多少? (2) 该光栅每厘米内有多少条缝? (3) 第 2 级明纹是否可能出现? 为什么?

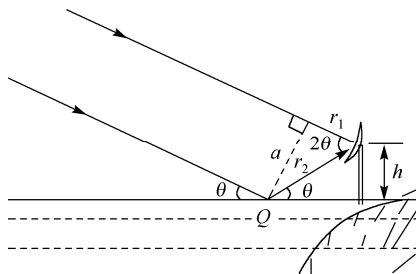


图 9.20 习题 9.9 图

9.11 用方解石晶体（负晶体）切成一个截面为正三角形的棱镜，光轴方向如图 9.21 所示，若自然光以入射角  $i$  入射并产生双折射，试分别定性画出 o 光和 e 光的光路及振动方向（负晶体： $v_o < v_e$ ，即  $n_o > n_e$ ）。

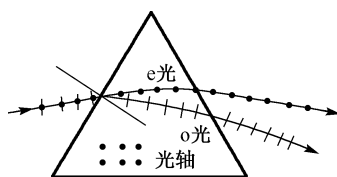


图 9.21 习题 9.11 图

## 第 10 章 狭义相对论基础

相对论是在研究电磁波的传播介质“以太”是否存在时诞生的。它给出了高速物体的力学规律，并从根本上改变了长久以来所形成的时间、空间和运动的陈旧观念（经典时空观认为在所有惯性参考系中，时间和空间的量度是绝对的，它们不随进行量度的参考系变化），建立了新的时空观（相对论力学则认为时间和空间的测量与惯性参考系的选择有关），揭示了质量和能量的内在联系。根据狭义相对论的两条基本假设，建立了洛伦兹变换关系，由此给出了“时钟延缓”、“长度收缩”等相对论效应。相对论力学适用于高速运动的情况，也适用于低速运动的情况，当物体做低速运动时，相对论力学就过渡为经典力学。

### 10.1 学习要求

#### 1. 狭义相对论的两个基本假设

- (1) 了解伽利略变换及绝对时空观。
- (2) 理解狭义相对论两条基本原理，伽利略坐标变换和洛伦兹坐标变换式。
- (3) 掌握相对论速度变换及相关运算。

#### 2. 狭义相对论的几个重要结论

- (1) 掌握同时性的相对性、长度收缩和时间延缓概念。
- (2) 掌握相对论质量、动量和能量关系。
- (3) 了解相对论与经典力学的区别和联系。

### 10.2 内容提要

#### 1. 狭义相对论与牛顿力学时空观

空间的广延性与时间的持续性是人们长期以来对时空的基本认识，牛顿力学关于时间、空间的概念归纳为如下几个方面：

- (1) 经典力学的基本原理。包括：①时间的绝对性，即时间是均匀的，时间间隔是绝对的，时间间隔在一切惯性系中是相同的；②空间的绝对性，即空间是各向同性的，长度

是绝对的, 长度的测量在一切惯性系中是相同的; ③时间和空间是相互独立的, 彼此之间没有任何直接联系。

(2) 经典力学的相对性原理。在所有惯性系中, 物体运动所遵循的力学规律是相同的, 即具有相同的数学表达形式, 或者说, 对于描述力学现象的规律而言, 所有惯性系是等价的。

### (3) 伽利略变换

#### ① 伽利略坐标变换:

$$\begin{array}{ll} \text{正变换为} \begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} & \text{逆变换为} \begin{cases} x = x' + vt \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases} \end{array} \quad (10-1)$$

#### ② 伽利略速度变换:

$$\begin{array}{ll} \text{正变换为} \begin{cases} u'_x = u_x - v \\ u'_y = u_y \\ u'_z = u_z \end{cases} & \text{逆变换为} \begin{cases} u_x = u'_x + v \\ u_y = u'_y \\ u_z = u'_z \end{cases} \end{array} \quad (10-2)$$

#### ③ 伽利略加速度变换:

$$\begin{array}{ll} \text{正变换为} \begin{cases} a'_x = a_x \\ a'_y = a_y \\ a'_z = a_z \end{cases} & \text{逆变换为} \begin{cases} a_x = a'_x \\ a_y = a'_y \\ a_z = a'_z \end{cases} \quad \text{即 } \vec{a} = \vec{a}' \end{array} \quad (10-3)$$

在牛顿力学中, 空间和时间不仅被看作同物质一样独立存在, 而且还扮演了某种具有绝对意义的角色, 它作为一个惯性系作用于一切物体。

牛顿力学相对性原理是在实验基础上总结出来的, 实践表明: 力学相对性原理反映了宏观物体做低速运动时的规律。

在伽利略变换中,  $K'$  系的时间  $t'$  和  $K$  系的时间  $t$  是一样的, 即  $t' = t$ 。这意味着, 两个系的观察者可以共用一只钟, 这与空间坐标不同, 即表明时间坐标是绝对的。

以牛顿定律为基础的经典力学在处理宏观、低速运动物体的问题上取得了辉煌的成就, 但是, 当物体的运动速度接近光速时, 经典力学遇到了无法克服的困难, 原因在于它是建立在绝对时间和绝对空间的基础上, 认为时间和空间与物体的运动无关。为了解决这一困难, 爱因斯坦抛弃了绝对时空观, 提出了相对性原理和光速不变原理。

## 2. 爱因斯坦狭义相对论的两条基本原理

1905 年爱因斯坦摒弃了以太假说和绝对参考系的想法, 在前人实验的基础上提出了两条基本假设:



① 相对性原理：物理定律在一切惯性参考系中都具有相同的数学表达式，也就是说，所有惯性系对于描述物理现象都是等价的；

② 光速不变原理：在彼此相对做匀速直线运动的任一惯性参考系中，所测得的光在真空中的传播速度都是相等的。

### 3. 洛伦兹坐标变换

#### (1) 空间与时间的变换

$$\begin{aligned} \text{正变换为} \begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \end{cases} & \quad \text{逆变换为} \begin{cases} x = \gamma(x' + vt') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right) \end{cases} \end{aligned} \quad (10-4)$$

其中  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ 。

#### (2) 相对论速度变换

正变换为

$$\begin{aligned} u'_x &= \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} & u'_y &= \frac{u_y \sqrt{1-v^2/c^2}}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} & u'_z &= \frac{u_z \sqrt{1-v^2/c^2}}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} \end{aligned} \quad (10-5)$$

逆变换为

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{u'_x + v}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}} & u_y &= \frac{u'_y \sqrt{1-v^2/c^2}}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}} & u_z &= \frac{u'_z \sqrt{1-v^2/c^2}}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}} \end{aligned} \quad (10-6)$$

其中， $u'_x$  是物体相对于动系的速度， $u_x$  是物体相对于静系的速度， $v$  是动系相对于静系的速度。

说明：

- ① 当速度  $u$ 、 $v$  远小于光速  $c$  时，相对论速度变换就转化为伽利略速度变换；
- ② 相对论速度变换遵从光速不变原理。

### 4. 狭义相对论的时空观

#### (1) 同时的相对性

设在  $S'$  参考系内的两点  $x'_1$  和  $x'_2$  同时发生某事件， $S'$  参考系的观察者认为是同时发生的，而  $S$  系的观察者认为不是同时发生的；同样在  $S$  参考系内两地同时发生的两件事，在  $S'$  参考系内认为不是同时发生的。

说明:

- ① 在  $S$  系中, 发生在不同地点的同时发生的事件, 在  $S'$  系中观测并不同时发生;
- ② 在  $S$  系中, 发生在同一地点的同时发生的事件, 在  $S'$  系观测也是同时发生的;
- ③ 具有因果关系的事件, 其先后次序在  $S$  系、 $S'$  系中不能颠倒。

### (2) 长度收缩

对于物体有相对速度  $v$  的坐标系中测得的沿速度方向的物理长度, 总比与物体相对静止的坐标系中测得的固有长度短。

$$l' = l\sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (\text{注意同时条件, 即在同一时刻去测量物体的两端}) \quad (10-7)$$

其中,  $l$  是相对于物体为静止的参考系中测得物体的长度,  $l'$  是相对于物体是运动的参考系中测得物体的长度。

### (3) 时间延缓 (时间膨胀)

对于物体具有相对速度  $v$  的运动参考系中观测事物变化过程的时间间隔, 总比在与物体相对静止的坐标系中测得的时间间隔大。

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (\text{注意同地条件, 即两件事情发生在同一地点}) \quad (10-8)$$

其中,  $t_0$  是相对于过程发生地点为静止的参考系中测得的时间间隔,  $t$  是相对于过程发生地点为运动的参考系中测得的时间间隔。

### (4) 相对性与绝对性

时空具有相对性, 但是事件的因果关系不会因为参考系的选择发生变化, 这也是时空的绝对性。

## 5. 狭义相对论力学基础

狭义相对论中的质量与速度关系为

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (10-9)$$

其中,  $m_0$  为物体相对于静止的惯性系中测出的质量, 称为静止质量;  $m$  是物体相对于观察者具有相对速度  $v$  时的质量, 称为运动质量。

狭义相对论中的动量与速度关系为

$$p = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} v \quad (10-10)$$

狭义相对论力学的基本方程为

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt} \left( \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \mathbf{v} \right) \quad (10-11)$$

质量和能量关系为

$$E = mc^2 \quad E_0 = m_0 c^2 \quad E_k = mc^2 - m_0 c^2 \quad (10-12)$$

其中,  $E$  是总能,  $E_0$  是静能,  $E_k$  是动能。

动量和能量的关系为

$$E^2 = c^2 p^2 + E_0^2 = c^2 p^2 + m_0^2 c^4 \quad (10-13)$$

### 6\*. 迈克尔孙-莫雷实验

1887 年迈克尔孙和莫雷设计了一个著名实验, 来寻找绝对静止的“以太”参考系。根据他们的设想, 如果存在以太并完全不为地球运动所带动, 那么地球对于以太的运动速度就是地球的绝对速度。他们制造了一台超干涉仪, 如图 10.1 所示。单色光从光源  $S$  发出, 经半镀银玻片  $P$  分成两束, 一束透过  $P$  向右, 被反射镜  $M_1$  反射折回  $P$ , 再被  $P$  反射后进入望远镜  $E$ ; 一束被  $P$  射向上, 被  $M_2$  反射折回, 再透过  $P$  后也进入望远镜  $E$ 。  $l_1$  和  $l_2$  分别为干涉仪的两个彼此垂直的“臂”的长度, 整个装置浮在一个水银槽上, 可以在水平面内平稳地转动, 并保持光程  $PM_1 = PM_2$  固定不变。设地球相对绝对参考系的速度为  $v$ , 且使  $l_1 = l_2$ , 则光束 (1) 沿  $PM_1$  与  $v$  平行, 光束 (2) 沿  $PM_2$  与  $v$  垂直。可以证明:

- ① 光束 (1) 沿  $PM_1$  来回时间  $t_1 = \frac{l}{c-v} + \frac{l}{c+v}$ ;
- ② 光束 (2) 沿  $PM_2$  来回时间  $t_2 = \frac{2l}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}$ 。

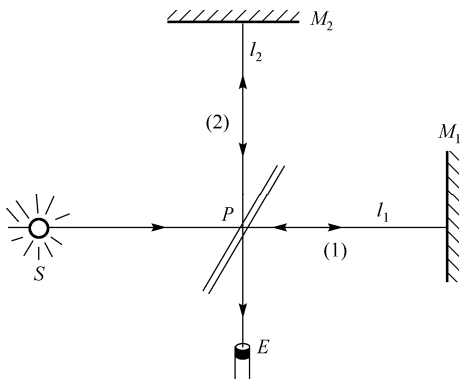


图 10.1 迈克尔孙-莫雷实验

并有  $\Delta t = |t_2 - t_1| = lv^2 / c^2$ ，然后把整个仪器转动  $90^\circ$  使其另一光臂沿地球运动方向，利用地球的绝对运动速度和光速在方向上的不同，即上述光束经历的路线正好相反，则  $t_1$  和  $t_2$  时间正好互换。从而，在转动过程中就能从望远镜中观察到干涉条纹的移动。从而求得地球相对于以太的绝对速度。

但是，迈克尔孙和莫雷在不同地理条件、不同季节条件下进行多次实验，却始终没能观察到干涉条纹的移动。该实验本来是用来验证以太参考系的存在，却成为否定以太参考系的证据。狭义相对论正是在这种条件下提出的。

以太——电磁波传播时需要的一种弹性介质。以太充满整个空间（包括真空，并渗透到一切物质的内部），以太参考系是绝对静止系。

绝对参考系——相对于以太静止的参考系。在绝对参考系中，光在各个方向的速度都相同。

### 7\* 电磁场的统一性和相对性

在洛伦兹变换下，两个不同惯性参考系中电磁场的变换关系为

$$\begin{cases} E'_x = E_x \\ E'_y = \gamma(E_y - vB_z) \\ E'_z = \gamma(E_z + vB_y) \end{cases} \quad \begin{cases} B'_x = B_x \\ B'_y = \gamma(B_y + E_z v/c^2) \\ B'_z = \gamma(B_z - E_y v/c^2) \end{cases} \quad (10-14)$$

式(10-14)表明电场和磁场是彼此联系，相互可以转化的。在一个惯性系中的电场不仅与另一个惯性系中的电场有关，还与另一惯性系中的磁场有关，反之亦然。这就是它们的统一性，电磁场是客观存在着的物质，而电场量和磁场量却只是它在某惯性系中的观测效应，电磁场量与惯性系的选取有关，这就是电磁场的相对性。电磁场是同一物质形成的两个方面。

## 10.3 重点难点分析

### 1. 本章重点

- (1) 正确理解同时的相对性、长度收缩和时间延缓概念。
- (2) 正确理解狭义相对论中的质量、动量、能量的关系。

### 2. 本章难点

- (1) 经典力学认为时间和空间是绝对的；狭义相对论认为时间和空间是相对的。
- (2) 在经典力学中，不同惯性参考系中的时间和空间满足伽利略变换；相对论力学中，不同惯性参考系中的时间和空间满足洛伦兹变换。

(3) 相对论力学认为不同惯性参考系中观测两个事件并不一定是同时发生的, 并且不同惯性参考系中测得物体的尺寸、质量和事件经历的时间并不一定是相同的。由此出现了“长度收缩”、“时钟延缓”等相对论效应。

(4) 利用相对论的时空观及质能关系分析、计算相关问题。

## 10.4 例题精选分析

**例10-1** (1) 牛顿力学的时空观与狭义相对论的时空观的根本区别是什么? 二者有何联系? (2) 你认为在相对论中, 是否一切都是相对的? 有没有绝对性的方面? 有那些方面? 举例说明。

**解:** (1) 牛顿力学的时空观认为自然界存在着与物质运动无关的绝对空间和时间, 这种空间和时间是彼此孤立的; 狭义相对论的时空观认为自然界时间和空间的量度具有相对性, 时间和空间的概念具有不可分割性, 而且它们都与物质运动密切相关。在远小于光速的低速情况下, 狭义相对论的时空观与牛顿力学的时空观趋于一致。

(2) 在相对论中, 并非一切都是相对的, 也有存在绝对性的方面。例如, 光相对于所有惯性系其速率是不变的, 即是绝对的; 又如, 力学规律, 如动量守恒定律、能量守恒定律等在所有惯性系中都是成立的, 即相对于不同的惯性系力学规律不会有所不同, 因此也是绝对的; 再者, 对同时同地的两事件同时具有绝对性等。

**例 10-2** 在地面上测得有两个飞船  $A$ 、 $B$  分别以  $+0.9c$  和  $-0.9c$  的速度沿着相反方向飞行, 如图 10.2 所示。求飞船  $A$  相对于飞船  $B$  的速度。

**解:** 如果利用伽利略的速度变换进行计算, 其结果为  $u_x = u'_x + v = 1.8c > c$ 。

该结果不符合光速是极限速度。因此不能用伽利略速度变换, 要用相对论速度变换关系式; 另一方面飞船的速度接近光速, 需用相对论速度变换。

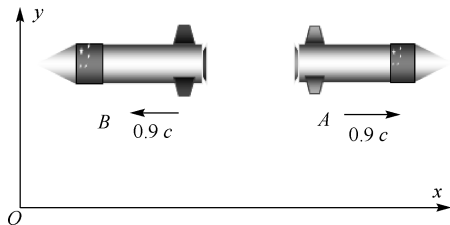


图 10.2 例 10.2 图

**解法 1:** 以地球为静系, 火箭  $B$  为动系, 利用相对论速度变换关系式。其中  $u'_x$  是在火箭  $B$  上测得火箭  $A$  的速度,  $u_x$  是在地球上测得火箭  $A$  的速度,  $v$  是火箭  $B$  相对于地球的速度, 将这些速度的值代入相对论速度变换关系式得

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} = \frac{0.9c - (-0.9c)}{1 - \frac{0.9c(-0.9c)}{c^2}} = 0.994c$$

**解法 2:** 以火箭  $B$  为静系, 地球为动系, 利用相对论速度变换关系式。其中  $u'_x$  是在地球上测得火箭  $A$  的速度,  $u_x$  是在火箭  $B$  上测得火箭  $A$  的速度,  $v$  是地球相对于火箭  $B$  的速度, 将这些速度的值代入相对论速度变换关系式得

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} \quad 0.9c = \frac{u_x - 0.9c}{1 - \frac{u_x 0.9c}{c^2}} \quad u_x = 0.994c$$

**解法 3:** 以火箭  $B$  为静系, 火箭  $A$  为动系, 利用相对论速度变换关系式。其中  $u'_x$  是在火箭  $A$  上测得地球的速度,  $u_x$  是在火箭  $B$  上测得地球的速度,  $v$  是火箭  $A$  相对于火箭  $B$  的速度, 将这些速度的值代入相对论速度变换关系式得

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} \quad -0.9c = \frac{0.9c - v}{1 - \frac{0.9cv}{c^2}} \quad v = 0.994c$$

从上述三种方法可以看出, 坐标系无论建在什么参考系上, 关键是要弄清楚相对论速度变换中几个参数的含义。 $u'_x$  一定是物体相对于动系的速度 (或者说是在动系上面测得物体的速度),  $u_x$  是物体相对于静系的速度 (或者说是在静系上测得物体的速度),  $v$  是动系相对于静系的速度 (在静系上测得动系的速度)。

**例 10-3** 宇宙飞船相对地球以  $0.8c$  飞行, 一光脉冲从船尾传到船头, 飞船上的观察者测得飞船长  $90\text{m}$ , 地球上的观察者测得光脉冲从船尾传到船头两事件的空间间隔是 (C)。

(A)  $30\text{m}$ (B)  $54\text{m}$ (C)  $270\text{m}$ (D)  $90\text{m}$ 

**解法 1:** 设飞船为  $S'$  系, 地球为  $S$  系, 由长度收缩公式得

$$\Delta l = \gamma^{-1} \Delta l' = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \cdot \Delta l' = 0.6 \times 90 = 54\text{m}$$

这个结果是错误的。一个发射信号, 一个接收信号, 两件事情不是同时发生。而利用长度收缩公式计算时则要求两件事情同时发生, 所以不能用长度收缩公式来计算, 只能用洛伦兹坐标变换公式计算。

**解法 2:** 飞船系中,  $\Delta x' = 90$ ,  $\Delta t' = 90/c$ 。

$$\text{地球系中, } \Delta x = \gamma(\Delta x' + u\Delta t') = \frac{1}{\sqrt{1 - 0.8^2}} \left( 90 + 0.8c \times \frac{90}{c} \right) = 270\text{m}。$$

此方法计算正确。

**解法 3:** 设飞船系为  $S$ , 地球系为  $S'$ ,  $S'$  相对  $S$  以  $0.8c$  运动, 地球系中, 有

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - u\Delta t) = \frac{1}{\sqrt{1-0.8^2}} \left( 90 - 0.8c \times \frac{90}{c} \right) = 30 \text{ m}$$

此方法计算错误，错误的原因在于将相对速度的方向考虑反了。此题是将飞船设为静系，将地球设为动系，飞船相对地球以  $0.8c$  飞行，则地球相对飞船的速度就应该为  $-0.8c$ 。此题正确解法见解法 4。

**解法 4：** 设飞船系为  $S$ ，地球系为  $S'$ ， $S'$  相对  $S$  以  $-0.8c$  运动，地球系中，有

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - u\Delta t) = \frac{1}{\sqrt{1-0.8^2}} \left( 90 - (-0.8c) \times \frac{90}{c} \right) = 270 \text{ m}$$

**例 10-4** 一位宇航员乘一艘火箭飞船以  $0.6c$  的速度飞过地球，同时校准他的时钟与地球时钟均指正午 12 点。按照宇航员的测定，火箭飞船在午后 12 点 30 分通过一个相对地球静止不动的空间站，并用无线电向地球报告。

- (1) 此时，空间站的时钟指的是什么时间？
- (2) 宇航员测定地球到空间站的距离是多少？
- (3) 地球上观测者测定地球到空间站的距离是多少？
- (4) 地球上收到无线电信号，地球上是什么时间？
- (5) 地球上收到无线电信号，飞船上是什么时间？

**解：**(1) 火箭飞船测得为原时（时钟相对于飞船静止），利用时间延缓效应（时钟计时时，时钟的地点没有发生变换，所以可以用时间延缓效应）。

$$\Delta t_{\text{空间站}} = \Delta t_{\text{火箭}} / \sqrt{1-v^2/c^2} = 30 / \sqrt{1-0.6^2} = 37.5 \text{ min}$$

空间站上时钟为午后 12 点 37.5 分。

(2) 宇航员测得距离（距离=速度×时间。在飞船上的宇航员观测时，地球则以  $0.6c$  的速度远离宇航员，所以这里所用到的速度是  $0.6c$ 。由于是在飞船上观测，所以时间用飞船上的时间，即 30min）为

$$v \times \Delta t_{\text{火箭}} = 0.6 \times 3 \times 10^8 \text{ m/s} \times 30 \text{ min} \times 60 \text{ s/min} = 3.24 \times 10^{11} \text{ m}$$

(3) 地球上观测者测得距离（这里的速度和时间都应该用地球上测得的速度和时间）为

$$v \times \Delta t_{\text{空间站}} = 0.6 \times 3 \times 10^8 \text{ m/s} \times 37.5 \text{ min} \times 60 \text{ s/min} = 4.05 \times 10^{11} \text{ m}$$

(4) 按地球上的钟，信号传播所需时间=距离/速度 =  $\frac{4.05 \times 10^{11} \text{ m}}{3 \times 10^8 \text{ m/s} \times 60 \text{ s/min}} = 22.5 \text{ min}$

因此，午后 12 点 37.5 分 + 22.5 分 = 午后 1 点，地球上收到信号。

(5) 按飞船上的钟，信号传播所需时间=距离/速度 =  $\frac{3.24 \times 10^{11} \text{ m}}{3 \times 10^8 \text{ m/s} \times 60 \text{ s/min}} = 18 \text{ min}$

宇航员测得, 午后 12 点 30 分 + 18 分 = 午后 12 点 48 分, 地球收到信号。

**例 10-5** 在北京正负电子对撞机中, 电子可以被加速到动能为  $E_k = 2.8 \times 10^9 \text{ eV}$ 。

(1) 这种电子的速率和光速相差多少 m/s?

(2) 这种电子的动量多大?

(3) 这种电子在周长为 240m 的储存环内绕行时, 它受到的向心力为多大? 需要多大的偏转磁场?

**解:** (1) 由相对论动能公式得

$$E_k = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} c^2 - m_0 c^2$$

反解出速度为

$$v = c \sqrt{1 - \left( \frac{m_0 c^2}{m_0 c^2 + E_k} \right)^2}$$

将数据代入上式中得

$$\begin{aligned} \Delta v &= c - c \sqrt{1 - \left( \frac{m_0 c^2}{m_0 c^2 + E_k} \right)^2} \\ &= 3 \times 10^8 \left[ 1 - \sqrt{1 - \left( \frac{9.11 \times 10^{-31} \times 9.0 \times 10^{16}}{9.11 \times 10^{-31} \times 9.0 \times 10^{16} + 2.8 \times 10^9 \times 1.6 \times 10^{-19}} \right)^2} \right] \approx 5.0 \text{ m/s} \end{aligned}$$

(2) 由于电子的速度与光速接近, 所以动量中涉及的质量需要用相对论中的质量为

$$p = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} v = \frac{9.11 \times 10^{-31} \times 3 \times 10^8}{\sqrt{1 - \left( \frac{3 \times 10^8 - 5}{3 \times 10^8} \right)^2}} \approx 1.48 \times 10^{-18} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

$$(3) \quad F = m \frac{v^2}{r} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \cdot \frac{2\pi v^2}{l} = \frac{9.11 \times 10^{-31}}{\sqrt{1 - \left( \frac{3 \times 10^8 - 5}{3 \times 10^8} \right)^2}} \cdot \frac{2\pi (3 \times 10^8 - 5)^2}{240}$$

$$F \approx 1.18 \times 10^{-11} \text{ N}$$

由洛伦兹力提供向心力, 得

$$B = \frac{F}{ev} = \frac{1.18 \times 10^{-11}}{1.6 \times 10^{-19} \times (3 \times 10^8 - 5)} \approx 0.25 \text{ T}$$



## 10.5 习题

10.1 一火箭的固有长度为  $L$ ，相对于地面做匀速直线运动的速度为  $v_1$ ，火箭上有一个人从火箭的后端向放置在火箭前端的一个靶子发射一颗相对于火箭的速度为  $v_2$  的子弹。

- ① 在火箭参考系中测得子弹从射出到击中靶的时间间隔是 ( )；  
 ② 在地面参考系中测得子弹从射出到击中靶的时间间隔是 ( $c$  表示真空中光速) ( )。

(A)  $\frac{L}{v_1 + v_2}$       (B)  $\frac{L}{v_2}$       (C)  $\frac{\frac{L}{v_2} + \frac{v_1}{c^2}L}{\sqrt{1 - (v_1/c)^2}}$       (D)  $\frac{L}{v_2\sqrt{1 - (v_2/c)^2}}$

10.2 设某微观粒子的总能量是它的静止能量的  $K$  倍，则其运动速度的大小为 ( $c$  表示真空中的光速) ( )。

(A)  $\frac{c}{K-1}$       (B)  $\frac{c}{K}\sqrt{1-K^2}$       (C)  $\frac{c}{K}\sqrt{K^2-1}$       (D)  $\frac{c}{K+1}\sqrt{K(K+2)}$

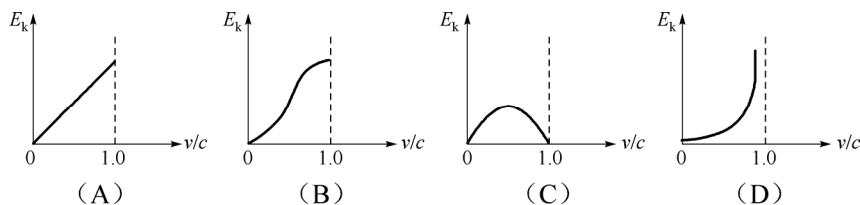
10.3 一匀质矩形薄板，在它静止时测得其长为  $a$ ，宽为  $b$ ，质量为  $m_0$ ，由此可推算出其面积密度为  $m_0/ab$ ，假定该薄板沿长度方向以接近光速的速度  $v$  做匀速直线运动，此时再测算该矩形薄板的面积密度为 ( )。

(A)  $\frac{m_0\sqrt{1-(v/c)^2}}{ab}$       (B)  $\frac{m_0}{ab\sqrt{1-(v/c)^2}}$   
 (C)  $\frac{m_0}{ab[1-(v/c)^2]}$       (D)  $\frac{m_0}{ab[1-(v/c)^2]^{3/2}}$

10.4  $K$  系与  $K'$  系是坐标轴相互平行的两个惯性系， $K'$  系相对于  $K$  系沿  $OX$  轴正方向匀速运动，一根刚性尺静止在  $K'$  中，与  $O'X'$  轴成  $30^\circ$  角，今在  $K$  系中观察得该尺与  $OX$  轴成  $45^\circ$  角，则  $K'$  系相对于  $K$  系的速度是 ( )。

(A)  $(2/3)c$       (B)  $(1/3)c$       (C)  $(2/3)1/2c$       (D)  $(1/3)1/2c$

10.5 令电子的速率为  $v$ ，则电子的动能  $E_k$  对于比值  $v/c$  的图线可用下列图中哪一个图表示？( $c$  表示真空中光速)



题 10.5 图

10.6 在参照系  $S$  中, 有两个静止质量都是  $M_0$  的粒子  $A$  和  $B$ , 分别以速  $v$  沿同一直线相向运动, 相碰后合在一起成为一个粒子, 则其静止质量  $M_0$  的值为 ( )。

- (A)  $2M_0$       (B)  $2M_0\sqrt{1-(v/c)^2}$       (C)  $\frac{M_0}{2}\sqrt{1-(v/2)^2}$       (D)  $\frac{2M_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$

10.7 观察者甲以  $4c/5$  的速度相对于静止的观察者乙运动, 若甲携带一长度为  $l$ 、截面积为  $s$ , 质量为  $m$  的棒, 这根棒放置在运动方向上, 则甲测得此棒的密度为\_\_\_\_\_；乙测得此棒的密度为\_\_\_\_\_。

10.8 一物体的速度使其质量增加了 10%, 试问此物体在运动方向上缩短了百分之几?

10.9 一发射台向东西两侧距离均为  $L_0$  的两个接收站  $E$  与  $W$  发射信号, 今有一飞机以匀速度  $v$  沿发射台与两接收站的连线由西向东飞行, 试问在飞机上测得两接收站接收到发射台同一信号的时间间隔是多少?

10.10 一短跑选手, 在地球上以 10s 时间跑完 100m, 在飞行速度为  $0.98c$  的飞船中观察者观察, 这选手跑了多少时间和多长距离?

10.11 火箭相对于地面以  $0.6c$  ( $c$  为真空中光速) 的匀速度向上飞离地球。在火箭发射 10s 后 (火箭上的钟), 该火箭向地面发射一导弹, 其速度相对于地面为  $0.3c$ , 问火箭发射后多长时间 (地球上的钟), 导弹到达地球? 计算中假设地面不动。

10.12 一静止质量为  $m_0$  的粒子, 裂变成两个粒子, 速度分别为  $0.6c$  和  $0.8c$ 。求裂变过程的静质量亏损和释放出的动能。

# 第 11 章 量子力学基础

作为研究物质结构和物质运动基本规律的物理学，总是生机勃勃、不断地开辟自己前进的道路，19 世纪建立起来的被称为经典物理学的电动力学、热力学和统计物理学，对之前众多的物理现象给出了满意的描述。然而，自然科学不断的发展又使得经典物理学理论潜伏着危机。首先是科学家们在用经典物理学的方法解释热辐射实验结果时遇到了困难。1893 年维恩假设黑体辐射能谱分布与麦克斯韦分子速率分布类似，得出理论公式，这一理论与实验曲线的短波能较好吻合，而在波长很长处与实验曲线相差较大。1900~1905 年瑞利-金斯把统计物理学中的能量按自由度均分定理应用到电磁辐射上，又得到相应理论，但该理论也只是在波长很长处与实验曲线较接近，在短波紫外光区方面也与实验极不相符，这就是历史上所谓的“紫外灾难”。之后，人们又相继发现，经典物理在解释热辐射、光电效应、康普顿效应等问题上遇到了不可逾越的障碍。正是在这种历史背景下，人们逐步开始认识量子化的概念，以及微观粒子特有的本质，并在量子论的基础上建立了量子力学。

## 11.1 学习要求

### 1. 经典物理的困惑

(1) 了解经典物理在解释热辐射、光电效应、康普顿实验时所遇到的困难；理解普朗克量子假设的内容和意义。

(2) 掌握德布罗意的物质波假设；掌握爱因斯坦光子假设及爱因斯坦方程，了解戴维孙-革末实验。

(3) 了解玻尔的氢原子模型；了解夫兰克-赫兹实验、原子里德堡态、对应原理。

### 2. 量子物理基本原理

(1) 理解波函数及其概率解释。

(2) 理解一维坐标动量不确定关系。

### 3. 一维定态薛定谔方程的应用及量子力学中的其他问题

(1) 了解一维定态薛定谔方程及薛定谔方程处理一维无限深势阱等物理问题的方法。

(2) 理解氢原子的能量和角动量量子化，以及原子中电子状态按四个量子数的分布规律。

(3) 了解电子自旋，施特恩-盖拉赫实验；了解泡利原理、原子的壳层结构、元素周期表。

## 11.2 内容提要

### 1. 基本概念

#### (1) 黑体热辐射

黑体辐射问题所研究的是辐射与周围物体处于平衡状态时的能量按波长（或频率）的分布。

如果一个物体能全部吸收投射在它上面的辐射而无反射，这种物体就称为绝对黑体，简称黑体，它是一种理想模型，一个空腔可以近似看作黑体。

实验发现：热平衡时，空腔辐射的能量密度（或称辐出度，常用  $M(T)$  表示，单位为  $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$ ）与辐射的波长（ $\lambda$ ）的分布曲线，其形状和位置只与黑体的绝对温度  $T$  有关，即

$$M(T) = \int_0^{\infty} M_{\lambda}(T) d\lambda \quad (11-1)$$

实验分布曲线如图 11.1 所示，进一步实验指出，在相同温度下，不同物体，特别是物体表面（粗糙程度）不同时， $M_{\lambda}(T)$  的量值是不同的，相应  $M(T)$  的量值也不同。图 11.1 中曲线下的面积等于黑体在一定温度下的总辐出度。

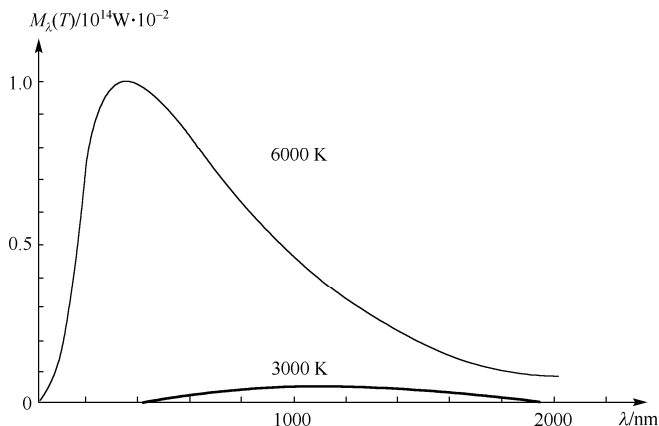


图 11.1 黑体的辐出度按波长分布曲线

根据实验曲线，得到如下两条实验定律：

① 斯特藩-玻尔兹曼定律：在一定波长下，黑体的辐出度随热力学温度  $T$  的关系为

$$M(T) = \sigma T^4 \quad (11-2)$$

这一结果只适用于黑体，实验测得式中  $\sigma = 5.670 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$ ，称为斯特藩（-玻尔兹曼）常量。

② 维恩位移定律：图 11.1 中  $M_\lambda(T) \sim \lambda$  曲线的峰值对应的（峰值）波长  $\lambda_m$  随温度  $T$  的升高，向短波方向移动，两者间的关系经实验测定为

$$T\lambda_m = b \quad (11-3)$$

由实验测得式中  $b = 2.897 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$ ，称为维恩常量。

1893 年维恩假设黑体辐射能谱分布与麦克斯韦分子速率分布类似，得出维恩公式：

$$E(\nu)d\nu = c_1 \nu^3 e^{-c_2 \nu/T} d\nu \quad (11-4)$$

其中， $c_1$ 、 $c_2$  为常量， $E(\nu)d\nu$  为辐射能量密度。维恩公式在短波部分与实验相符合，在长波部分则明显不一致，如图 11.2 所示。

瑞利-金斯（Rayleigh-Jeans）公式为

$$E(\nu)d\nu = \frac{8\pi kT}{c^3} \nu^2 d\nu \quad (11-5)$$

式中， $c$  为光在真空中的光速， $k$  为玻尔兹曼常数。该理论是 1900 年至 1905 年瑞利-金斯把统计物理学中的能量按自由度均分定理应用到电磁辐射而得到的。该理论只在波长很长处与实验曲线较接近，在短波紫外光区也与实验极不相符，这就是历史上所谓的“紫外灾难”。“紫外灾难”的出现及经典物理对光电效应解释的困难，使经典物理遇到了严峻的挑战。

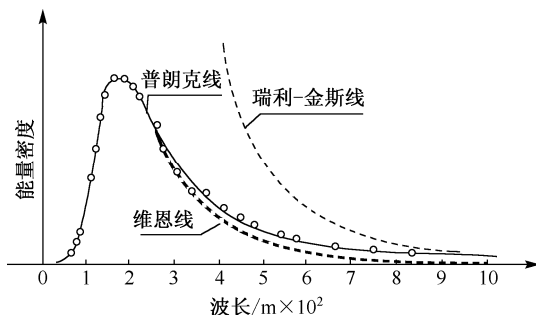


图 11.2 黑体辐射能量分布曲线

## (2) 光电效应

光电效应是光照射到金属上时，有电子从金属中逸出的现象。逸出电子称为光电子。

实验证明：① 只有当光的频率  $\nu$  大于某一定值  $\nu_0$ （截止频率）时，才有光电子发射出来；② 如果光的频率低于这个值时（ $\nu < \nu_0$ ），则不论光的强度多大，照射时间多长，都没有光电子产生；③ 光电子的能量只与光的频率有关，而与光的强度无关，光的频率越高，光电子的能量就越大。光的强度只影响光电子的数目，强度增大，光电子的数目就增多；光电效应具有瞬时性。

经典理论在解释光电效应所遇到的困难：① 经典理论无法说明光电效应为何会存在截止频率，光电子的初动能为何与频率成正比，而与光强无关；② 由于能量可以积累，那

么无论照射光强多弱，只要用足够长时间照射金属表面，总会有光电子逸出，但事实上，观察不到这种现象，经典理论也无法解释。

1905 年，爱因斯坦为了摆脱经典理论解释光电效应所遇到的困难，大胆提出假设：光由以光速  $c$  运动的光量子（或光子）组成。频率为  $\nu$  的光，其光量子的能量为

$$\varepsilon = h\nu \quad (11-6)$$

根据爱因斯坦假设，当光照射到金属表面上时，光子能量被电子所吸收，电子将能量的一部分用来克服逸出金属表面需要做的功  $W_0$ ，另一部分就是电子离开金属表面后的动能，即

$$\frac{1}{2}\mu v^2 = h\nu - W_0 \quad (11-7)$$

上式称为爱因斯坦光电方程。式中， $\mu$  是电子的质量， $v$  是电子脱出金属表面后的速度， $W_0$  是电子脱出金属表面所需要做的功，称为脱出功或逸出功。由光电方程就可以解释光电效应的实验结果。 $h\nu > W_0$  时，电子才具有初动能，它才能逸出金属表面；而当  $h\nu \leq W_0$  时，电子不具有初动能，所以，截止频率为  $\nu_0 = \frac{W_0}{h}$ 。不同金属的  $W_0$  不同，故截止频率也

不同；只要入射光的频率  $\nu > \nu_0$ ，由光电方程知，电子初动能  $\frac{1}{2}\mu v^2$  总是大于零，这时不管光强度多弱，总有光电流产生；光的频率决定光子的能量，光的强度只决定光子的数目，光子多，产生的光电子也多。这一结论是经典物理所不能解释的。

### (3) 康普顿效应

1922 年，康普顿在研究 X 射线通过石墨等物质而产生的现象时，发现了 X 射线被轻元素中的电子散射后，波长随散射角增大而增大。这一结论，根据经典电动力学，电磁波被散射后波长不应改变。但是把这个过程看作是光子与电子碰撞的过程，则康普顿效应就可以得到完满的解释。

### (4) 普朗克量子假设和普朗克公式

为了解决经典物理不能解释黑体辐射的困难，普朗克在 1900 年引入量子概念后才得到解决。

普朗克假设：对一定频率  $\nu$  的辐射，物体只能以  $h\nu$  为能量单位不连续地发射和吸收频率为  $\nu$  的辐射，而不是像经典物理那样可以连续地发射和吸收能量。 $h\nu$  称为能量子， $h$  为普朗克常数，它的最新测量值是  $h = 6.626\,069\,3(11) \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ 。换言之，物体吸收或发射电磁辐射，只能以“量子”的方式进行，每个“量子”的能量为  $\varepsilon = h\nu$ ，称为作用量子或能量子。

基于以上量子假设，普朗克得到了与实验结果相符的黑体辐射公式

$$M(T)d\nu = \frac{8\pi h\nu^2}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} d\nu \quad (11-8)$$

式中,  $M(T)d\nu$  是黑体内频率在  $\nu$  到  $\nu+d\nu$  之间的辐射能量密度,  $c$  是光速,  $k$  是玻尔兹曼常量,  $T$  是黑体绝对温度。这一公式称为普朗克公式。

普朗克公式能很好地与实验相吻合, 如图 11.2 所示为普朗克线。

注意: ①由普朗克公式还可以推得由实验得出的斯特藩-波尔兹曼定律(见式(11-2))和维恩位移定律(见式(11-3)); ②由普朗克公式还可求得在极限时的瑞利-金斯公式和维恩公式。

普朗克的量子假设与经典物理学的概念格格不入, 从经典物理学来看, 能量子的假设是荒诞的、不可思议的。直到 1905 年爱因斯坦在普朗克量子假设基础上, 提出光量子概念, 正确地解释了光电效应后, 普朗克量子假设概念才被人们逐渐接受。

#### (5) 光的波粒二象性与德布罗意的物质波假设

光子不仅具有能量  $\varepsilon$ , 而且还具有质量  $m_\phi$  和动量  $p$  等一般粒子共有的特性, 与光的频率  $\nu$ 、波长  $\lambda$  的关系为

$$\varepsilon = h\nu, \quad m_\phi = \varepsilon / c^2 = h\nu / c^2, \quad p = \frac{h\nu}{c} \mathbf{n} \left( = \frac{h}{\lambda} \mathbf{n} = \hbar \mathbf{k} \right) \quad (11-9)$$

式中,  $\mathbf{n}$  表示沿光子运动方向的单位矢量,  $\omega = 2\pi\nu$  表示角频率,  $\mathbf{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{n}$  称为波矢,

$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.054\,571\,686(18) \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$  是量子力学中常用符号, 也称为约化普朗克常量。

光子与带电粒子作用过程中遵守能量守恒定律和动量守恒定律, 并且动量也是量子化的。总之, 光电效应和康普顿效应表明, 光在与物质发生相互作用时, 表现为粒子性; 而光的干涉和衍射则又表明光在传播过程中表现为波动性。所以光具有波粒二象性, 这才是光的本性。

1924 年德布罗意 (de Broglie) 在光有波粒二象性的启示下, 提出了微观粒子也具有波粒二象性的假说。他认为在对光的研究上, 只重视光的波动性而忽略了光的粒子性。但在对实体的研究上, 又过分重视实体的粒子性而忽略了实体的波动性。因此, 他提出了实物粒子具有波动性的假说。德布罗意把粒子和波通过下面的关系式联系起来, 即粒子的能量  $E$ 、动量  $p$  与频率  $\nu$ 、波长  $\lambda$  之间的关系为

$$E = h\nu = \hbar\omega \quad (11-10)$$

$$p = \frac{h}{\lambda} \mathbf{n} = \hbar \mathbf{k} \quad (11-11)$$

式(11-10)与式(11-11)称为德布罗意公式, 或德布罗意关系。

#### (6) 玻尔的氢原子模型

##### ① 氢原子光谱的规律性

1889 年, 里德伯在巴耳末工作的基础上提出了与实验吻合的氢原子光谱公式:

$$\tilde{\nu} = R \left( \frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad \begin{matrix} k = 1, 2, 3, \dots \\ n = k + 1, k + 2, k + 3, \dots \end{matrix} \quad (11-12)$$

该式称为里德伯方程, 其中,  $R = \frac{4}{B} = 1.096\,776 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$ , 称为里德伯常数,  $\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda}$  为波数。可见原子的光谱线是有规律的。

## ② 原子的核结构模型与玻尔的氢原子理论

根据实验结果, 卢瑟福认为: 原子的结构犹如太阳系中的行星绕太阳运动一样, 正电荷位于球心, 电子像行星一样, 围绕正电荷运动。处于球心的正电荷, 称为原子核。所以, 卢瑟福的模型叫做原子行星模型。

根据上述卢瑟福原子的核结构模型, 电子在原子中绕核转动, 这种加速运动着的电子应向外发射电磁波, 它的频率等于电子绕核运动的频率。由于能量辐射, 原子系统的能量就会不断减小, 频率也将逐渐改变, 因而所发射的光谱应该是连续的。同时由于能量的减少, 电子将沿螺旋线运动逐渐接近原子核, 最后落在核上。因此, 按经典理论, 卢瑟福的核型结构就不可能是稳定的系统。

1913 年, 玻尔为了解决上述困难, 在卢瑟福的核型结构基础上, 把量子化概念应用到原子系统, 并结合里兹组合原理, 提出 3 个基本假设:

a) 定态假设, 即原子系统只能处在一系列不连续的能量状态, 在这些状态中, 虽然电子绕作加速运动, 但不辐射也不吸收电磁波, 这些状态称为原子系统的稳定状态或叫定态, 相应的能量分别为  $E_1, E_2, E_3, \dots$  ( $E_1 < E_2 < E_3 \dots$ )。

b) 频率条件, 即当原子从一个能量为  $E_n$  的定态跃迁到另一能量为  $E_k$  的定态时, 就要发射或吸收一个频率为  $\nu_{kn}$  的光子:

$$\nu_{kn} = \frac{|E_k - E_n|}{h} \quad (11-13)$$

式中,  $h$  是普朗克常量,  $E_k - E_n > 0$  时吸收光子,  $E_k - E_n < 0$  时发射光子。式 (11-13) 称为玻尔频率条件。

c) 量子化条件, 即在电子绕核做圆周运动中, 其稳定状态必须满足电子的角动量  $L$  等于  $\frac{h}{2\pi}$  的整数倍的条件, 即

$$L = n \frac{h}{2\pi} = n\hbar \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (11-14)$$

式中,  $n$  为正整数, 称为量子数, 式 (11-14) 称为角动量量子化条件。

说明:

a) 定态假设是针对氢原子核型结构与经典电磁理论的矛盾而提出的。由于氢原子结构的稳定性, 只有假定电子在圆轨道上运动时不辐射, 才能保证原子的稳定性;



b) 频率条件假设指出辐射光的条件, 及能量的守恒;

c) 量子化条件则指出, 电子绕核运动的圆轨道是有限制的, 只有满足电子的角动量  $L$  等于  $h/2\pi$  这样一个量子化条件才是许可的, 这是普朗克能量量子化的进一步发展, 提出了角动量量子化。

### ③ 不确定关系

在经典力学中通常用质点的坐标和运动 (或速度) 的值来描述质点状态。质点的其他力学量, 如能量等是坐标和动量的函数, 当坐标和动量确定之后, 其他力学量就确定了。但在量子力学中, 不可能同时用粒子坐标和动量的确定值来描述粒子的量子状态, 因为粒子具有波粒二象性, 粒子的坐标和动量不可能同时具有确定值。对于一维运动的粒子, 位置的不确定范围  $\Delta x$  和动量的不确定范围  $\Delta p$  之间有以下关系:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq h \quad (11-15)$$

其物理意义是在求解具体的问题时, 如果算出的坐标范围  $\Delta x$  和动量范围  $\Delta p$  是可以忽略的。

## 2. 波函数及其概率解释

### (1) 波函数

为了解释波和它所描述的粒子之间的关系, 引入了描述微观粒子状态的波函数。不同粒子或同一粒子在不同状态, 波函数的形式不同, 通常波函数都用复数表示。对于具有能量  $E$  和动量  $p$  的沿  $x$  轴运动的自由粒子, 其波函数为

$$\Psi(x, t) = \psi_0 e^{-i\frac{2\pi}{h}(Et - px)} \quad (11-16)$$

式 (11-16) 便是描述自由粒子的德布罗意波方程。可将上式写成  $\Psi(x, t) = \psi(x)\phi(t)$ , 其中  $\psi(x) = \psi_0 e^{i\frac{2\pi}{h}px}$  也叫定态波函数。

### (2) 波函数的统计解释

① 波函数在空间中某点的强度 (振幅绝对值的平方) 和在该点找到粒子的几率成比例。用数学形式表示为

$$dP = |\psi|^2 dV \quad (11-17)$$

也就是说, 描述粒子的波是几率波, 即由波函数的振幅的平方可以得出粒子在空间  $dV$  任一点出现的几率  $dP$ 。由波函数还可以得出体系的各种性质, 因此说波函数可描述体系的量子状态 (简称状态或态)。

由于粒子必定要在空间中的某一点出现, 所以粒子在空间各点出现的概率总和等于 1, 即

$$\int_V |\psi|^2 dV = 1 \quad (11-18)$$

满足上式的波函数称为归一化函数，也称为归一化条件。

② 如果  $\psi_1$  和  $\psi_2$  是某一体系的可能状态，那么它们的线性叠加

$$\psi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2 \quad (c_1, c_2 \text{ 是复数}) \quad (11-19)$$

也是该体系的一个可能状态，这就是量子力学的态叠加原理。这个关系也可理解为，当粒子处于以波函数  $\psi$  所描述的量子状态时，粒子的力学量，如坐标、动量等一般可以有許多可能值，每个可能值各自以一定的概率出现，例如，粒子处于小体积  $dV$  中的几率为  $|\psi|^2 dV$ ，同样粒子的动量为  $p$  的几率也可由波函数给出，这就是波函数的统计解释。

③ 薛定谔方程

波函数满足的方程叫薛定谔方程。该方程满足 3 个条件：a) 波函数所满足的方程只能含有  $\psi$  对时间的一阶导数；b) 方程应是线性的；c) 方程不能包含状态参量，如  $p$ 、 $E$  等。一维运动自由粒子含时薛定谔方程为

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (11-20)$$

一维定态（与时间无关的状态）薛定谔方程为

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \psi = 0 \quad (11-21)$$

式中， $E$  和  $U$  分别是粒子的总能量和势能。粒子在三维空间运动，定态薛定谔方程为

$$\nabla^2 \psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \psi = 0 \quad (11-22)$$

### 3. 电子自旋、原子的电子壳层结构与元素周期表

#### (1) 旋特恩-格拉赫实验

如果原子磁矩在空间的取向是连续的，那么原子束经过不均匀磁场发生偏转后，将在照相底板上得到连续一片的原子沉积；如果原子磁矩在空间取向是分立的，那么原子束经过不均匀磁场偏转后，在底板上得到分立的原子沉积。实验证明：原子束通过狭缝形成很细的一束原子射线，在不加磁场时该射线在底板上沉积成一条正对狭缝的沉积痕迹，在加均匀磁场时该射线在底板上分裂为正对狭缝的上下对称的两条沉积痕迹。这一现象证实了原子具有磁矩且磁矩在外磁场中只有两种取向，即空间取向是量子化的。

1925 年，乌伦贝和古兹特提出了电子自旋的假说，认为电子除轨道运动外，还存在着一种固有的自旋运动，且具有自旋角动量  $S$  以及相应的自旋磁矩  $\mu$ 。电子的自旋磁矩与自旋角动量成正比，且方向相反。

电子绕自身轴线转运, 其自旋角动量为

$$S = \sqrt{s(s+1)} \frac{h}{2\pi} \quad (11-23)$$

在外磁场方向的分量为

$$S_z = m_s \frac{h}{2\pi} \quad (11-24)$$

以上两式中,  $s = \frac{1}{2}$  为自旋量子数,  $m_s = \pm \frac{1}{2}$  为自旋磁量子数。

## (2) 原子的电子壳层结构

原子中电子的状态由下列 4 个量子数确定:

- ① 主量子数  $n$ ,  $n=1, 2, 3, \dots$ 。
- ② 角量子数  $l$ ,  $l=0, 1, 2, \dots, (n-1)$ 。角量子数可以决定电子轨道角量子。
- ③ 磁量子数  $m_l$ ,  $m_l=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$ 。磁量子数可以决定电子自旋角动量在外磁场方向上的分量。

- ④ 自旋磁量子数  $m_s = \pm \frac{1}{2}$ 。自旋量子数决定电子自旋角动量在外磁场方向上的分量。

上述四个量子数可用来标志原子的状态, 一组  $(n, l, m_l, m_s)$  就可确定原子的一个状态。电子在原子中的分布遵从以下两个原理:

- ① 泡利不相容原理, 即在一个原子系统内, 不可能有两个或两个以上的电子具有相同的状态, 亦即不可能具有相同的四个量子数。

由泡利原理可知, 对应于主量子数  $n$  (即能级  $E_n$ ), 共有

$$Z_n = \sum_{l=0}^{n-1} 2(2l+1) = 2n^2 \quad (11-25)$$

个状态。

- ② 能量最小原理, 即原子系统处于正常状态时, 每个电子趋向于占有最低能级。

## 11.3 重点难点分析

### 1. 本章重点

理解普朗克量子假设的内容和意义; 理解德布罗意的物质波假设; 了解量子力学基本原理。

## 2. 本章难点

理解有别于经典物理的全新的量子物理概念；初步掌握运用量子理论处理微观运动的基本思想；正确理解量子理论建立的过程。

## 11.4 精选例题分析

**例 11-1** 试将普朗克公式的频率表示  $M_\nu(T)$  换算到波长表示  $M_\lambda(T)$ 。

分析：根据式 (11-1)，温度为  $T$  的黑体，在波长为  $\lambda$  到  $\lambda + d\lambda$  范围内，单位时间单位面积的辐射能为  $M_\lambda(T)d\lambda$ ，若以频率表示，则在频率为  $\nu$  到  $\nu + d\nu$  范围内，单位时间单位面积的辐射能为  $M_\nu(T)d\nu$ ，显然，这两种表示的能量应相等。

解：因为  $M_\lambda(T)d\lambda = -M_\nu(T)d\nu$ ，式中负号表示  $d\lambda$  与  $d\nu$  的正负号相反。当  $d\lambda$  为正时， $d\nu$  为负，反之亦然。又由  $\nu = \frac{c}{\lambda}$ ，得

$$d\nu = -\frac{c}{\lambda^2}d\lambda$$

所以

$$\begin{aligned} M_\lambda(T) d\lambda &= -M_\nu(T) d\nu = M_\nu(T) \frac{c}{\lambda^2} d\lambda = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \frac{c}{\lambda^2} d\lambda \\ &= \frac{2\pi}{\lambda^2} \cdot \frac{h\frac{c}{\lambda}}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} \frac{c}{\lambda^2} d\lambda = \frac{2\pi c^2}{\lambda^5} \frac{h}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} d\lambda \end{aligned}$$

**例 11-2** 求温度为  $27^\circ\text{C}$  时，对应于最概然速率的氧分子的德布罗意波长。

分析：可把温度为  $27^\circ\text{C}$  时的氧分子视为理想气体，于是有最概然速率

$$v_p = \sqrt{\frac{2RT}{M}} = 394.7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

解： $v_p$  对应的德布罗意波长为  $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv_p} = \frac{hN_A}{Mv_p}$ ，式中， $m$  为氧分子质量， $N_A$  为阿

伏加德罗常数，将其代入则有

$$\lambda = \frac{hN_A}{Mv_p} = 3.16 \times 10^{-11} \text{ m}$$

**例 11-3** 试确定氢原子的  $K$  壳层中，电子可能具有的量子数 ( $n, l, m_l, m_s$ )。

解：因为电子处于  $K$  壳层，所以  $n=1$ ， $l=0$ ， $m_l=0$ ， $m_s = \pm \frac{1}{2}$ 。

**例 11-4** 试求在一维无限深势阱中粒子概率密度的最大值的位置。

**解：**一维无限深势阱中粒子概率密度为

$$|\psi_n(x)|^2 = \frac{2}{a} \sin^2 \frac{n\pi}{a} x, \quad n=1, 2, 3, \dots$$

将上式对  $x$  求一阶导数，并令它等于零：

$$\left. \frac{d|\psi_n(x)|^2}{dx} \right|_{x=0} = \frac{4n\pi}{a^2} \sin^2 \frac{n\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{a} x = 0$$

因为在阱内，即  $0 < x < a$ ， $\sin \frac{n\pi}{a} x \neq 0$ ，只有

$$\cos \frac{n\pi}{a} x = 0$$

于是

$$\frac{n\pi}{a} x = (2N+1) \frac{\pi}{2}, \quad N=0, 1, 2, \dots, n-1$$

由此解得最大值的位置为

$$x = (2N+1) \frac{a}{2\pi}$$

例如

$$\begin{aligned} n=1, \quad N=0, & \quad \text{最大值位置 } x = \frac{1}{2}a \\ n=2, \quad N=0, 1, & \quad \text{最大值位置 } x = \frac{a}{4}, \frac{3}{4}a \\ n=3, \quad N=0, 1, 2, & \quad \text{最大值位置 } x = \frac{1}{6}a, \frac{3}{6}a, \frac{5}{6}a \end{aligned}$$

可见，概率密度最大值的数目和量子数  $n$  相等。

相邻两个最大值间的距离  $\Delta x = \frac{a}{n}$ 。如果阱宽  $a$  不变，当  $n \rightarrow \infty$  时， $x \rightarrow 0$ 。这时最大值连成一片，峰状结构消失，概率分布变为均匀分布，与经典理论的结论趋于一致。

**例 11-5** 设康普顿效应中入射的 X 射线的波长  $\lambda = 0.07 \text{ nm}$ ，散射的 X 射线与入射线垂直，求：（1）反冲电子的动能  $E_k$ ；（2）反冲电子的运动方向与入射的 X 射线之间的夹角。（普朗克常量  $h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ ，电子的静止质量  $m_e = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$ ）

**解：**令  $p$ 、 $\nu$  和  $p'$ 、 $\nu'$  分别为入射与散射光子的动量和频率， $m\nu$  为反冲电子的动量（见图 11.3）。已知散射线与入射线垂直，可求得散射线的波长为

$$\lambda' = \lambda + \frac{h}{m_e c} = 0.724 \times 10^{-10} \text{ m}$$

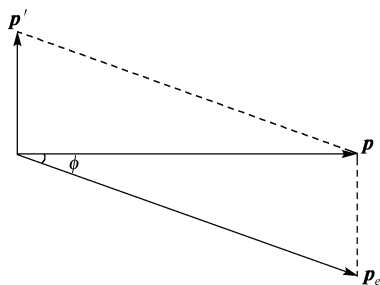


图 11.3 例 11-5 解图

(1) 反冲电子的动能等于光子失去的能量, 即

$$E_k = h\nu - h\nu' = \frac{hc(\lambda' - \lambda)}{\lambda'\lambda} = 9.42 \times 10^{-17} \text{ J}$$

(2) 根据动量守恒定律,  $\mathbf{p} = \mathbf{p}' + \mathbf{p}_e$  有如图所示的矢量关系, 所以, 反冲电子的运动方向与入射的 X 射线之间的夹角  $\phi$  为

$$\phi = \arctan\left(\frac{h/\lambda'}{h/\lambda}\right) = \arctan(\lambda/\lambda') = 44.03^\circ$$

## 11.5 习题

11.1 光电效应和康普顿效应都包含电子和光子的相互作用过程。对此, 有以下几种理解, 正确是 ( )。

- (A) 两种效应中, 电子和光子组成的系统都服从动量守恒定律和能量守恒定律
- (B) 两种效应都相当于电子和光子的弹性碰撞过程
- (C) 两种效应都属于电子吸收光子的过程
- (D) 光电效应是电子吸收光子的过程, 而康普顿效应则相当于光子和电子的弹性碰撞过程

11.2 氢原子中处于 3d 量子态的电子, 描述其量子态的四个量子数 ( $n, l, m_l, m_s$ ) 可能取的值为 ( )。

- (A) (3, 1, 1, 1/2)      (B) (3, 2, 0, 1/2)      (C) (2, 1, 2, 1/2)      (D) (1, 0, 1, 1/2)

11.3 关于不确定关系  $\Delta x \Delta p \geq h$ , 以下几种理解, 正确的是 ( )。

- (A) 粒子的动量不能准确确定
- (B) 粒子的动量和坐标不能同时准确确定
- (C) 粒子的坐标不能准确确定
- (D) 不确定关系仅适用于微观粒子, 不适用于宏观粒子

11.4 锂和汞的逸出功分别为  $2.3\text{eV}$  和  $4.5\text{eV}$ ，如果用波长为  $300\text{nm}$  的光照射，试问哪种材料会出现光电效应？光电子的最大动能为多少？

11.5 如果一个电子处于原子某能态的时间为  $10^{-8}\text{s}$ ，那么该原子在该能态的能量的最小不确定量是多少？设电子从上述能态跃迁到基态，对应的能量为  $3.39\text{eV}$ ，试确定所辐射光子的波长及此波长的最小不确定量。

11.6 一个电子的总能量是它的静止能量的 5 倍，问它的速率、动量、动能各为多少？

11.7 求出能够占据一个  $d$  分壳层的最大电子数，并写出这些电子的  $m_l$  和  $m_s$  的值。

11.8 若电子和光子的波长均为  $0.20\text{nm}$ ，则它们的动量和动能各为多少？

## 第 12 章 分子与固体 现代高新技术

物理化学已经阐明各种物体是由最小元素构成的，原子是元素的最小单元，各种元素其原子的结构与性质是有差异的，也就是说保持物质性质的最小单元。例如，碳、铁、铜都是元素，它们的最小单元分别是碳原子、铁原子和铜原子，这几种原子有各自的结构和特性，它们可以被击破，但击破后的粒子就没有碳、铁、铜的特性了。事实上，所有物质最终都是由几种基本粒子构成的，这几种基本粒子怎样构成多种多样的、具有各种元素特性的原子，在原子物理学中有详细的介绍。本章主要介绍固态物质的各种物理性质，固体区别于气体和液体的特点在于其组成粒子（可以是原子、离子、分子或它们的集团）的空间位置在没有外力作用时大多不会有宏观尺度的变化，在低温下基本处于固定的位置。也正是根据组成粒子空间位置的区别，即物质结构上的差别，通常将固态材料划分为 3 类：晶体、准晶体和非晶体。

### 12.1 学习要求

#### 1. 晶体结构

- (1) 了解晶体、非晶体的概念；了解晶体的周期性。
- (2) 理解点阵、基元、原胞的基矢、晶胞、Wigner-Seitz 原胞。
- (3) 了解晶体的对称性；理解典型的晶体结构。

#### 2. 固体的能带结构

- (1) 理解电子的共有化概念，能带的形成。
- (2) 了解满带、导带和禁带的概念。
- (3) 了解导体、半导体和绝缘体。

#### 3. 团簇和纳米材料

- (1) 了解纳米材料。
- (2) 了解纳米技术。
- (3) 了解扫描隧道显微镜 STM、激光器介绍。



## 12.2 内容提要

### 1. 基本概念

#### (1) 晶体与非晶体

① 晶体：晶体结构的显著特点就是粒子（原子）排列规则，具有排列的周期性，这种周期的阵列称为点阵或格子，如氯化钠、金刚石、铁、铜。其宏观性质包括规则的外形、一定的熔点、各向异性、晶面角守恒、解理性，即具有周期性（长程有序）。一种晶体的物理性质与其组成的元素有关。也要注意，即使是同种元素构成的不同晶体，也会表现出不同的特性。例如，同为碳元素组成的石墨、碳 60 和金刚石就具有明显不同的性质。

② 非晶体：构成物体的粒子不具有排列的周期性，即没有长程周期性（如玻璃、橡胶、松香等）。

③ 晶体的配位数：晶体中一个原子周围近邻的原子数叫配位数。可用来表征原子排列的紧密程度，最紧密的堆积称为密堆积，密堆积对应最大的配位数。例如，不论是六角还是立方密堆积，晶体的配位数都必须是 12，即任意一个原子球与最近邻的 12 个原子相切。又如，一维晶格的配位数为 2，如图 12.1 所示。



图 12.1 一维晶格的配位数

#### (2) 晶体的周期结构（基元、格点、晶格）

晶体结构的显著特点就是粒子排列的周期性，这种周期性的阵列称为点阵或晶格，晶格是晶体结构的数学抽象，即“点”在空间的周期性排列，其中每个“点”均为实际晶体中粒子的抽象，称为格点。在具体的晶体中，每个粒子都是在空间重复排列的最小单元，称为基元。基元中往往包含一个或几个原子、离子或分子。因此，点阵中的点即实际晶体中“基元”的抽象，如同将一个物体抽象成一个质点；而实际晶体结构与点阵和基元的关系可概括地表示为

$$\text{晶体结构} = \text{点阵} + \text{基元} \quad (12-1)$$

所谓点的周期性阵列，即若将晶体结构看作是在三维空间无限延伸的，那么任何一个点周围的情形都是完全相同的，这正是周期性的精髓所在。通常将这种点的周期性阵列称为布拉维（Bravais）点阵或格子，而点即为格点。于是，实际的晶体即可看成全同的基元安置在布拉维格点上。图 12.2 所示为二维晶格、格点、基元示意图。

#### (3) 原胞的基矢

由于布拉维点阵的周期性，每一个格点在空间所“拥有”的体积都一样，设这一体积为  $\Omega$ 。如果以某一格点为原点  $O$ ，则总可以沿三个不共面的方向找到与  $O$  相连的格点，如

图 12.3 所示。设图中  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三点，原点  $O$  到三点的长度分别为  $OA$ 、 $OB$ 、 $OC$ ，并令沿  $OA$ 、 $OB$ 、 $OC$  的三个矢量为  $\mathbf{a}_1$ 、 $\mathbf{a}_2$ 、 $\mathbf{a}_3$ ，这三个矢量所围成的平行六面体中不再包含其他格点，则此平行六面体的体积为

$$\Omega = \mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3) \quad (12-2)$$

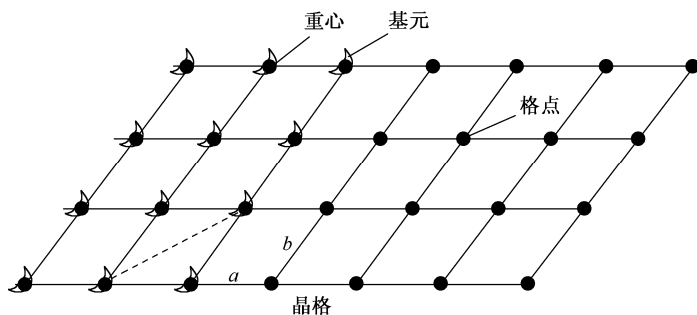


图 12.2 二维晶格、格点、基元示意图

这一平行六面体涉及八个格点，但每个格点同时涉及八个彼此相邻的平行六面体。

显然，将此平行六面体沿  $\mathbf{a}_1$ 、 $\mathbf{a}_2$ 、 $\mathbf{a}_3$  三个方向作周期重复必能填满全部空间而无任何缺漏。这一平行六面体称为布拉维格子的原胞，而  $\mathbf{a}_1$ 、 $\mathbf{a}_2$ 、 $\mathbf{a}_3$  则称为原胞基矢。显然，原胞的必要条件是在其范围内只包含一个格点。对于二维原胞及其基矢选取的任意性如图 12.4 所示。

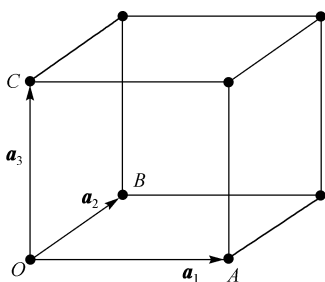


图 12.3 简单立方晶格的原胞与基矢

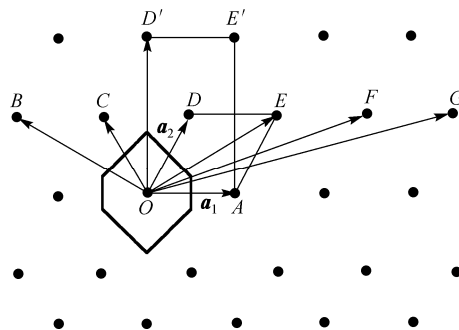


图 12.4 原胞及其基矢选取的任意性（二维）

#### (4) 晶胞

晶体材料除有周期性，还有对称性。原胞能很好的描述晶体和周期性，但有时却不能兼顾结构的对称性。（见图 12.4），选取  $OAED$  作原胞，基矢  $\mathbf{a}_1 = \overrightarrow{OA}$ 、 $\mathbf{a}_2 = \overrightarrow{OD}$ ，但图不能反映矩形的对称性。若选  $OAE'D'$  为周期性的重复单元，就能反映矩形的对称性。这样选取的重复单元称为晶胞。沿晶胞边方向且长度与边长相等的矢量称为晶胞基矢，分别用  $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 、

$c$  表示, 基矢长度称为晶格常数。晶胞可以包含一个以上的结点。原胞是考虑点阵周期性的最小重复单元, 而晶胞是同时计及周期性和对称性的尽可能小的重复单元。根据不同的对称性, 有的布拉维格子的原胞与晶胞相同; 有的形状有明显差别, 但后者的体积必为前者的整数倍, 这一整数正是晶胞中所包含的格点数。

### (5) 典型的晶体结构

布拉维格子描述晶体结构的周期性, 至于点阵的形式却并不是任意的。实际上可能存在的格子类型都受到晶体结构对称性的限制。换言之, 原胞的形状或原胞基矢  $\mathbf{a}_1$ 、 $\mathbf{a}_2$ 、 $\mathbf{a}_3$  彼此的相对取向及长度比要受到对称性的制约。于是, 只能有 14 种类型的布拉维格子。以如图 12.4 为例, 这一结构具有对  $OD'$  的反映对称, 因此, 如果  $E$  处有一格点, 那么,  $B$  处必定有一格点, 这就限制了格子的形状。

三维布拉维点阵一共有 14 种, 如图 12.5 所示, 图中画出的是每一种格子的晶胞。

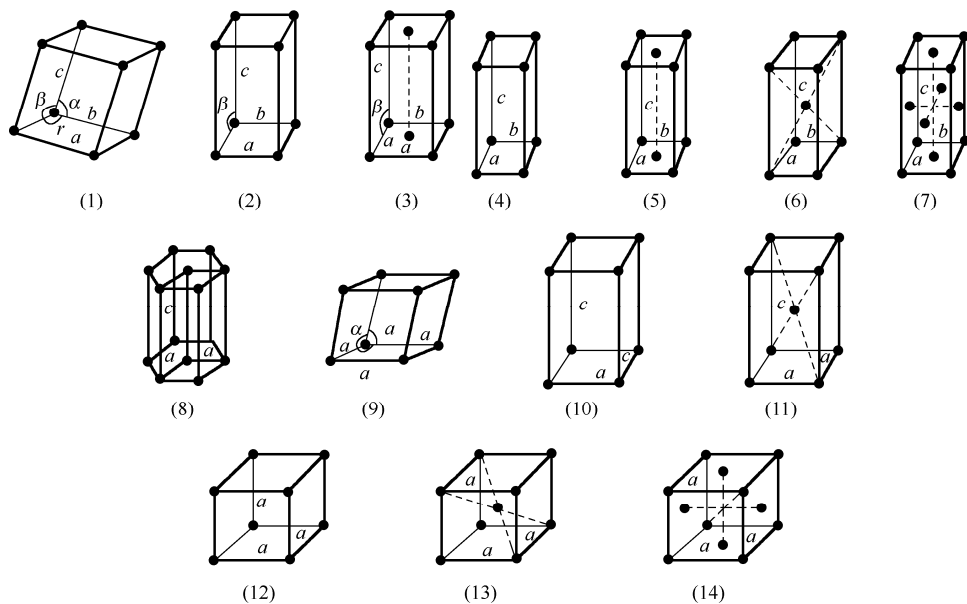


图 12.5 十四种布拉维格子

- (1) 简式三斜; (2) 简式单斜; (3) 底心单斜; (4) 简式正交; (5) 底心正交; (6) 体心正交; (7) 面心正交;  
(8) 六角; (9) 三角; (10) 简式四角; (11) 体心四角; (12) 简立方; (13) 体心立方; (14) 面心立方

### (6) 七大晶系

考虑到晶格的对称性, 结晶学上选取的重复单元——晶胞不一定是最小重复单元, 晶胞的基矢方向便是晶体晶轴方向, 晶轴上的周期就是基矢的模, 称为晶格常数。根据晶胞基矢的特征, 晶体可分为七大晶系: 三斜晶系、单斜晶系、正交晶系、三角晶系、四方晶系、六方晶系、立方晶系。每种具体的晶系在固体物理一章中有专门的介绍。

## 2. 固体的能带结构

### (1) 电子的共有化

共价结合是靠两个原子各自贡献一个电子, 形成所谓的共价键。氢分子是靠共价结合的典型例子。就其一般而言, 一个价电子原子可以看成由一个电子和一个正离子组成, 电子在正离子的场中运动。根据量子理论, 当这类系统的原子结合在一起时, 可以形成所谓成键态和反成键态。设想有原子 A 和原子 B 是互为近邻的一对原子, 当它们是自由原子时, 它们各有一个价电子, 这时势能曲线为如图 12.6(a)所示, 当两个原子很近时, 它们的势能曲线为如图 12.6(b)实线所示。对于由大量原子做周期性有规则排列成晶体时, 晶体形成了如图 12.6(c)所示的周期性势场。

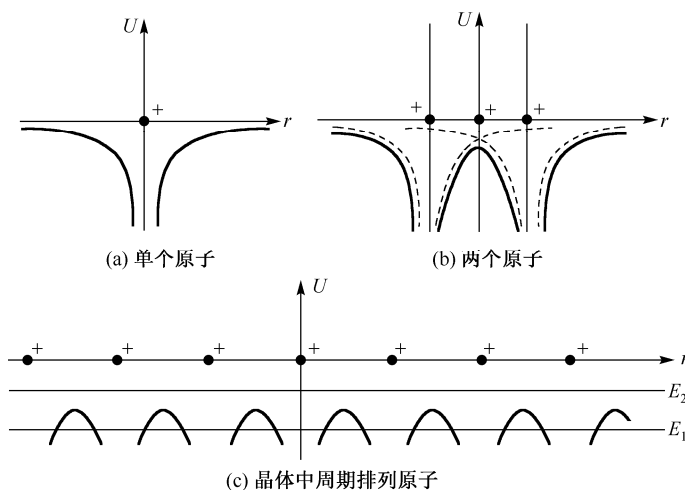


图 12.6 原子晶体中的势场

为了确定电子在晶体周期性势场中的运动形式, 运用量子力学中归一化波函数  $\phi_A$ 、 $\phi_B$  来求解, 这是一个比较复杂的问题。当两个原子较近时, 波函数交叠, 形成共价键, 这时每个电子均为 A、B 原子共有。当 A、B 两原子是同一种原子时, 两原子自由能级  $\varepsilon_A = \varepsilon_B = \varepsilon_0$ 。但由于它们相互接近, 这时描述电子轨道的波函数就为

$$\begin{aligned}\psi_+ &= C_+(\phi_A + \phi_B) \\ \psi_- &= C_-(\phi_A - \phi_B)\end{aligned}\quad (12-3)$$

式中,  $C_+$ 、 $C_-$  为归一化常数, 通常称  $\psi_+$ 、 $\psi_-$  为成键态和反成键态波函数, 成键态能量低于原子能级  $\varepsilon_0$ , 反键态的能量高于原子能级  $\varepsilon_0$ 。亦即这时原子的各个子能级不再具有原先的单一值, 而使两个原子的能量状态具有稍为不同的能量, 使原先的能级分裂成两个相距很近的子能级。

如图 12.6(c)所示, 对于能量为  $E_1$  的电子来说, 势能曲线代表势垒, 当电子能量低于  $E_1$

时, 电子将不能越过最大势能 (势垒), 这时可认为电子束缚在各自的离子周围。对于具有较大能量 (如大于  $E_2$ ) 的电子, 当电子能量超过势垒高度, 这时就可以在晶体中自由运动。还有一部分电子略大于  $E_1$ , 虽然不能越过势垒, 但却可以通过隧道效应进入相邻的原子中去。这样, 电子不在束缚于个别的原子, 而是在整个晶体内运动, 亦即由于晶体中原子的周期性排列而使价电子不再为单个原子所有的现象, 称为电子的共有化。在晶体内出现的一批属于整个晶体原子所共有的电子, 称为共有化电子。

### (2) 能带的概念

在周期性结构晶体中, 当 A、B 两原子间的距离很小时, 原子 A 上的电子除受到自身原子核作用外, 还受到另一个靠得很近的原子 B 的作用; 原子 B 也如此。原子间相互作用的结果使得原子的各个子能级不再具有原来的单一值, 而是使两个原子的能量状态具有稍微不同的能量, 例如, 当两个氢原子孤立时, 它们的核外电子处于基态 (1s 态)。当它们相互靠近形成一个氢分子时, 由于电子的共有化, 氢分子原先的能量  $E$  分裂为两个相距很近的子能级, 如图 12.7(a) 所示。图 12.7(b) 所示为晶体中 6 个彼此靠得很近的原子的 1s 态和 2s 态电子的能级分裂。

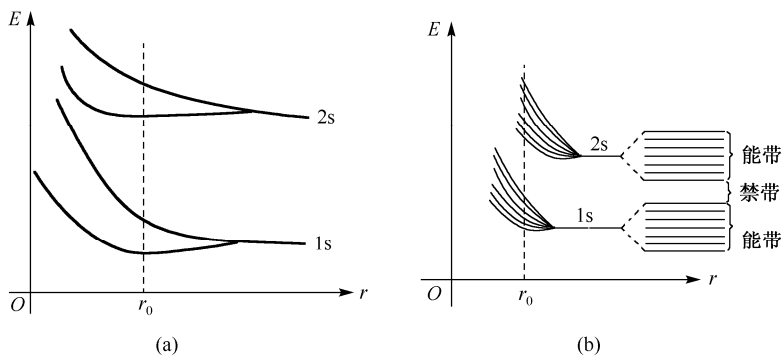


图 12.7 晶体中的能级分裂

在理想的周期性结构晶体中, 原子间的间距很小。设晶体由数量巨大的  $N$  个原子构成, 它们的外层电子被共有化, 使原来处于相同能级上的电子不再具有相同的能量, 而处于  $N$  个互相靠得很近的子能级上, 由于晶体中原子数目非常大, 这些子能级几乎靠在一起连成一片, 形成所谓的能带。

对于一定的晶体, 不同壳层的电子能级分裂所形成的能级宽度各不相同, 内层电子共有化程度不显著, 能带很窄, 而外层电子共有化程度显著, 能带较宽。能带的符号仍沿用子能级的符号, 如 1s、2s、2p、3s、3p……

### (3) 满带、导带与带隙

满带: 晶体中电子在各能带上的分布仍然遵从泡利原理和能量最小原理, 能级数取决于组成晶体的原子数。例如, 有  $N$  个原子, 则 1s、2s 轨道上可填充  $2N$  个电子, 2p、3p 等

p 轨道上可填充  $6N$  个电子等。晶体中, 电子按照能量从低到高的顺序来填充, 每个能级可填入自旋相反的两个电子, 如果一个能带中的各个能级都被电子填满, 这样的能带称为满带。晶体在外电场中, 满带的电子不能起导电作用。

导带: 由价电子能级分裂后形成的能带称为价带。若价带中的能级没有全部被电子填满, 在外电场作用下, 电子可进入能带中未被填充的高能级, 且没有反向电子的转移与之抵消, 因而形成电流, 故这样的能带又称为导带。

空带: 其中所有的能级都没有被电子填入, 这样的能带叫空带。

带隙: 各能带之间的间隔称为禁带, 禁带的宽度称为带隙。带隙的宽度对晶体的导电性起着重要作用, 有的晶体两个相邻能带可能重合, 这时带隙消失。

晶体的能带结构如图 12.8 所示。

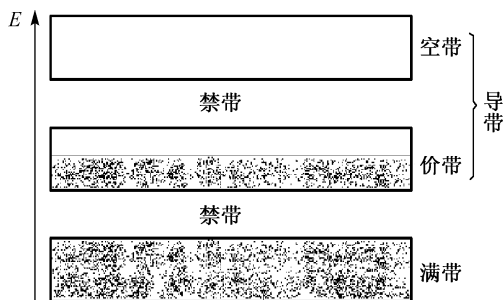


图 12.8 晶体的能带结构图

### 3. 导体、半导体和绝缘体

#### (1) 导体、半导体和绝缘体

电阻率在  $10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$  以下的物体, 称为导体; 电阻率在  $10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$  以上的物体称为绝缘体, 而半导体的电阻率介乎导体与绝缘体之间。

#### (2) 本征半导体和杂质半导体

半导体分为两类, 一类叫本征半导体, 另一类叫杂质半导体。

本征半导体: 纯净的无杂质的半导体称为本征半导体。本征半导体的导电特性是由于满带中的价电子在热激发或光激发的作用下, 由满带跃迁到导带而形成的。这时在导带中出现了电子, 而原来充满了价电子的满带, 则出现了空状态, 这种满带中的空状态叫做空穴, 空穴等同于一个带  $+e$  的电荷。

在半导体中掺入杂质可显著地改变半导体的特性。以硅和锗为例, 如果在其中掺入百万分之一量级的 III 族或 V 族元素, 可使其室温电导率增加  $5 \sim 6$  个数量级。

杂质半导体又分为空穴型 (p 型) 半导体和电子型 (n 型) 半导体。

n 型半导体: 将五价原子 (如磷 P、砷 As) 或三价原子 (如硼 B、铝 Al) 掺入到四价

元素（如硅 Si）中，如图 12.9(b)，图 12.9(c)所示以磷、硼原子替代硅原子的形式存在，故称之为替位式掺杂。图 12.9(b)为掺磷示意图，硅晶体中每个原子有四个最近邻原子，四个价电子与四个近邻原子形成共用电子对的共价键，于是构成最外层具有八个电子的稳定结构。磷替位后，由于磷有五个价电子，其中四个价电子与相邻硅原子形成共价键，第五个价电子所受的束缚较小，它可环绕带正电的离子磷（ $P^+$ ）运动。这个电子在  $P^+$  的电场中的电离能约为  $0.045\text{eV}$ 。它比硅的禁带宽度（ $E_g = 1.09\text{eV}$ ）要小很多。也即只需远小于禁带宽度的能量就能使这一电子脱离  $P^+$  的束缚而在晶体中自由运动，与此同时，磷原子被电离成一价正离子。这时，在半导体的价带和导带之间，产生了一个距导带很近的附加能级，这个能级叫施主能级。而磷（及其他 V 族元素）为施主型杂质。因为施主能级很靠近导带底，导带底与施主能级间的能量差称为施主电离能，通过计算可知，V 族元素在硅中的施主电离能在  $0.045 \sim 0.039\text{eV}$  之间，即施主电离能远小于禁带宽度，所以施主能级上的电子很容易受激发而跃迁到导带上去，参与导电。由于含有施主杂质半导体的载流子为电子，通常就将掺有施主杂质的半导体称为 n 型半导体。

p 型半导体：如以硼代替硅原子，则由于其外层只有三个价电子，与近邻形成完整的共价键缺一个电子。此时，近邻硅原子上的价电子不需多大能量便能来填补这一空缺而在自身位置留下一个电子缺位，如图 12.9(c)所示。由于硅原子的价电子处于价带中，硅原子共价键上的电子缺失对应于价带中出现一个带  $+e$  电荷的空穴。这个空穴在带  $-e$  电荷的硼离子作用下，将环绕硼离子（ $B^-$ ）。计算表明：室温下的热能足以使空穴在（ $B^-$ ）的电场中电离，电离能约为  $0.045\text{eV}$ 。当然也比硅的禁带宽度（ $E_g = 1.09\text{eV}$ ）要小很多。这时，同样在半导体的价带和导带之间，产生一个附加能级，这个能级的存在可为价带提供空穴，也可认为它接受来自价带的电子。故这个能级称为受主能级，而硼这类三价杂质则为受主杂质。因为受主能级很靠近价带，所以价带中的电子很容易因激发而跃迁到受主上去，并在价带中留下空穴，而空穴在电场的作用下要发生移动，参与导电。由于含有受主杂质半导体的载流子为空穴，通常就将掺有受主杂质的半导体称为 p 型半导体。

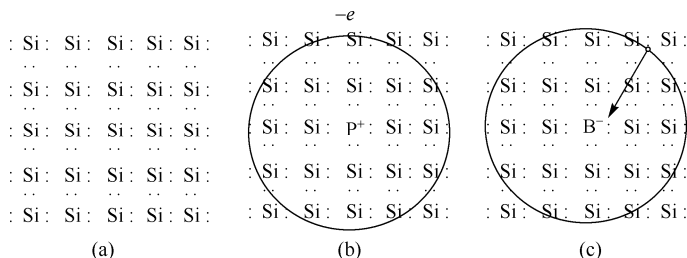


图 12.9 本征 Si 与掺杂 Si 示意图

(a) 本征 Si; (b) 掺施主型杂质; (c) 掺受主型杂质

施主能级和受主能级如图 12.10 所示，图中施主杂质能级为  $E_d$ ，受主杂质能级为  $E_a$ 。

则  $E_c - E_d$  为施主电离能,  $E_a - E_v$  为受主电离能。施主电离能与受主电离能都可用类氢模型估算, 为

$$E_l = \frac{m^* e^4}{8\pi\epsilon_0^2 \epsilon_s^2 h^2} = \left(\frac{m^*}{m}\right) \frac{1}{\epsilon_s^2} \times 13.6\text{eV} \quad (12-4)$$

式中,  $\epsilon_s$  为硅晶体的相对介电常数,  $m^*$  为导带中的有效质量 (以电子质量为单位)。注意在计算受主电离能时, 用价带顶的空穴有效质量  $m_h$  代替上式中导带中的有效质量  $m^*$ 。

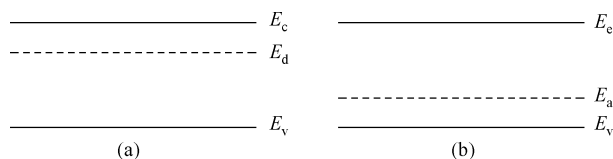


图 12.10 (a) 施主能级; (b) 受主能级

**pn 结:** 使 p 型半导体和 n 型半导体相接触, 它们交界处的结构称为 pn 结。由于电子和空穴的密度在两类半导体中并不相同, p 区空穴多电子少, n 区电子多空穴少, 因此, 在两区交界处的多数载流子将向另一区扩散, 如图 12.11(a)所示, 使在交结处形成正负电荷的积累, 由于这个积累电荷而在交接处形成一电偶层, 如图 12.11(b)所示。由于这个电偶层的存在, 在 p 型和 n 型相接触区域内, 也就产生由 n 指向 p 的电场, 从而阻止空穴、电子的进一步扩散, 直至达到动态平衡为止。这时, 在 p 型和 n 型相接触区域就存在如图 12.11(c)所示的电势变化情况。图中  $U_0$  为动态平衡时, p、n 势垒的高度。因而无论是空穴或电子都需要克服势垒  $U_0$  的高度才能通过偶电层进入 n 区或 p 区。

实验证明: 对 pn 结两端如果不加电压, 半导体中没有电流; 当 pn 结正向连接, 即把正极接 p 端, 负极接 n 端, 就有电流通过, 且电流为正值  $I > 0$ , 该电流称为正向电流; 当反向连接时, 即把正极接 n 端, 负极接 p 端, 这时有反向电流  $I < 0$ , 但绝对值较正向电流小, 如图 12.12 所示。

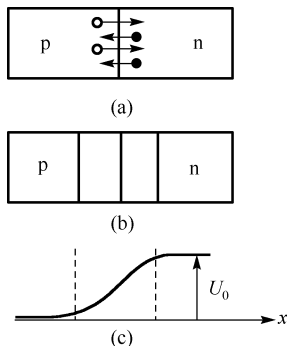


图 12.11 pn 结示意图

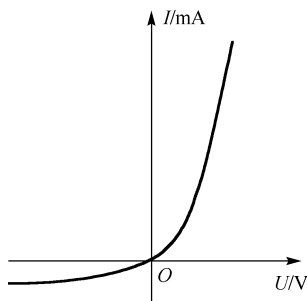


图 12.12 pn 的伏安特性



#### 4. 纳米材料

##### (1) 纳米概念

纳米(nanometer)是长度单位( $1\text{nm}=1\times 10^{-9}\text{m}$ )。纳米微粒,也叫超细颗粒,是线度在 $1\sim 100\text{nm}$ 范围的小颗粒,肉眼和普通显微镜是看不到的,所以有科学说:用电子显微镜(TEM)能看到的微粒称为纳米微粒。

1962年,久保(R·Kubo)指出金属超细颗粒有一些特点:一是颗粒线度甚小,其电子能级不再是准连续谱,而是离散的,能级间距随微粒的减小而增大;二是电子总数少,在有限个能级中分布;三是颗粒直径 $d$ 很小,在颗粒上增减一个电子需要静电能量有相应的变化,为

$$U = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 d} \quad (12-5)$$

$d$ 很小时, $U$ 可远大于 $k_B T$  ( $k_B$ 为玻尔兹曼常数, $T$ 为绝对温度),于是孤立颗粒电子数不会有涨落,即通常微粒是保持为电中性的。

##### (2) 纳米材料的特性及应用

纳米超微颗粒有很高的“比表面积”,这使其表面具有很高的活性。如在空气中,纳米金属颗粒会迅速氧化而燃烧。利用表面活性,金属超微颗粒有望成为新一代的高效催化剂、贮气材料和低熔点材料。

所有金属在超微颗粒状态时都呈现为黑色,尺寸越小,颜色越黑。金属超微颗粒对光的反射率很低,通常可低于1%,大约几微米厚度的膜就能起到完全消光的作用。利用这个特性可以制造高效率的光热、光电转换材料,以很高的效率将太阳能转变为热能、电能。另外还有可能应用于红外敏感元件、红外隐身材料等。

大尺寸的固态物质的熔点往往是固定的,超细微化的固态物质的熔点却低得多,当颗粒小于 $10\text{nm}$ 量级时尤为突出。例如,金的常规熔点为 $1064^\circ\text{C}$ ,当其颗粒的尺寸减小到 $10\text{nm}$ 时,熔点会降低 $27^\circ\text{C}$ ,而减小到 $2\text{nm}$ 尺寸时的熔点仅为 $327^\circ\text{C}$ 左右。

超微颗粒的小尺寸效应还表现在超导电性、介电性能、声学特性及化学性能等方面。

当热能、电场能或者磁场能比平均的能级间距还小时,就会呈现出一系列与宏观物体截然不同的反常特性,称之为量子尺寸效应。例如,导电的金属在超微颗粒时可以变成绝缘体,磁矩的大小与颗粒中电子是奇数还是偶数有关;比热亦会反常变化;光谱线会产生向短波长方向的移动,这就是量子尺寸效应的宏观表现。在低温条件下,对超微颗粒必须考虑量子效应,原有的宏观规律不再成立。

近年来,人们发现一些宏观物理量,如微颗粒的磁化强度、量子相干器件中的磁通量等显示出隧道效应,称之为宏观量子隧道效应。量子尺寸效应、宏观量子隧道效应将是未来微电子、光电子器件的基础,或者说它们确立了现存微电子器件进一步微型化的极限,当微电子器件进一步微型化时必须要考虑上述的量子效应。

碳纳米管、石墨烯等新材料的物性及应用也被人们进一步地研究。

### (3) 纳米材料的应用与展望

纳米材料在微电子器件和通信、纳米医疗、化学和材料、能源、飞机航天等领域已被广泛地应用。总之，纳米材料被人们誉为 21 世纪最有前途的材料，具有广泛的应用前景。

## 12.3 重点难点分析

### 1. 本章重点

本章重点介绍固态物质的简单概念及简单的物理性质，如晶体的分类（共价晶体、离子晶体、金属晶体、分子晶体等）。重点是晶体结构的显著特点——原子的规则排列，且具有排列的周期性，体会这种周期阵列（点阵或格子）以及晶体的宏观性质。真正体会“晶体结构 = 点阵 + 基元”关系式的物理意义。

### 2. 本章难点

由于没有详细介绍有关晶体旋转、对称等系列概念，因而对 14 种三维布拉维点阵的理解会有一定的难度。这部分知识可以参考固体物理相关教材。另外对固体的能带结构、半导体材料的掺杂、纳米材料的特性及应用等，这些与现代科学和技术相联系的问题，理解起来有一定的困难，建议同学可先从网上查找相关概念及知识，然后再找专门教材详细阅读。

## 12.4 精选例题分析

**例 12-1** 定义：原子堆积模型中，原子球体积与晶体体积之比为致密度。若晶体中最小重复单元为晶胞，则致密度定义为

$$\eta = \frac{\text{晶胞中原子体积}}{\text{晶体体积}}$$

试由此式计算简立方晶体的致密度。简立方晶体模型如图 12.13 所示。

**解：**设晶胞边长为  $a$ ，则  $V = a^3$ ；而原子半径  $r = \frac{a}{2}$ ，则原子球的体积为  $\frac{4}{3}\pi r^3$ ；一个晶胞内原子球的个数为  $\frac{1}{8} \times 8 = 1$ ，所以，晶胞内原子球的体积为

$$v_c = 1 \times \frac{4}{3}\pi r^3$$

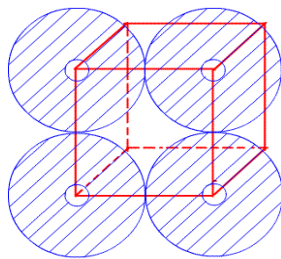


图 12.13 例 12-1 图

由致密度公式得

$$\eta = \frac{\text{晶胞中原子体积}}{\text{晶体体积}} = \frac{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^3}{a^3} = \frac{\pi}{6} \approx 0.52$$

**例 12-2** 已知金属钠的重量密度为  $9.71 \times 10^2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ，且每个钠原子只有一个价电子。求：(1) 载流子；(2) 费米能及费米速度。

分析：由题意，钠原子数与自由电子数相等。因此，只要先计算出钠原子的质量，就可以由已知的金属钠的质量密度求得自由电子浓度（即载流子浓度），有了载流子浓度  $n$ ，就可进一步计算出费米能和费米速度。

解：(1) 已知  $\rho = 9.71 \times 10^2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ，原子质量  $m_{\text{Na}} = \frac{m_{\text{mol}}}{N_{\text{A}}} = \frac{2.3 \times 10^{-2} \text{ kg}}{6.02 \times 10^{23}} = 3.82 \times 10^{-26} \text{ kg}$ ，  
所以有

$$n = \frac{\rho}{m_{\text{Na}}} = 2.54 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$$

(2) 费米能和费米速度分别为

$$E_{\text{F}} = \frac{3^{2/3} \pi^{4/3} \hbar^2}{2m_{\text{e}}} n^{2/3} = 5.05 \times 10^{-19} \text{ J} = 3.15 \text{ eV}$$

$$v_{\text{F}} = \sqrt{\frac{2E_{\text{F}}}{m_{\text{e}}}} = 1.05 \times 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

## 12.5 习题

12.1 解释概念：①原胞；②空间点阵。

12.2 氯化钠与金刚石结构是复式格子还是布拉维格子？各自的基元为何？写出这两种结构的原胞与晶胞基矢，设晶格常数为  $a$ 。

12.3 制造半导体元件的纯净锗必须掺入少量杂质原子，设均匀掺杂的比例为  $10^{-9}$ ，若将锗的结构看作立方点阵，晶格常量设为  $0.5 \text{ nm}$ ，试估计杂质原子之间的距离。

12.4 何为本征半导体、n 型半导体、p 型半导体？它们的载流子各是什么？它们的能带结构有何区别？

## 部分习题参考答案

### 第 1 章

$$1.1 \quad \mathbf{r} = (3t + 5)\mathbf{i} + (0.5t^2 + 3t - 4)\mathbf{j}, \quad y = \frac{x^2}{18} + \frac{4}{9}x - \frac{137}{18}, \quad 3\mathbf{i} + 7\mathbf{j}, \quad 1\mathbf{j}$$

$$1.2 \quad 9\text{m/s}, \quad 4\text{m/s}^2, \quad 81\text{m/s}^2$$

$$1.3 \quad v = v_0 e^{-(k/m)t}, \quad x = (mv_0 / k)[1 - e^{-(k/m)t}], \quad v_0(m / k)$$

$$1.4 \quad \mathbf{a} = ak^2 e^{kt}\mathbf{i} + bk^2 e^{-kt}\mathbf{j}, \quad xy = ab$$

$$1.5 \quad \text{C}$$

$$1.6 \quad \text{D}$$

1.7 根据相对运动公式, 它们之间的关系为  $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3$ , 由图可得  $|\mathbf{v}_2| = \frac{v_1}{\tan 75^\circ} = 5.36\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ 。

$$1.8 \quad f = F \cos 30^\circ = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 5.2\text{N}$$

$$1.9 \quad \sqrt{\frac{g}{R}}$$

$$1.10 \quad v = \frac{50}{10} = 5\text{m/s}$$

$$1.11 \quad F = Mk^2 x, \quad \Delta t = \frac{1}{k} \ln \frac{x_1}{x_0}$$

1.12 解: 根据速度的定义, 由运动方程  $x = ct^2$ , 可得物体在  $t$  时刻的速度为

$$v = \frac{dx}{dt} = 3ct$$

因此, 按题中所给条件可知, 物体受到的阻力大小为

$$f = kv^2 = 9kc^{2/3} x^{4/3}$$

阻力对物体所做的功为

$$A = \int_0^l \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x} = \int_0^l f \cos \pi d\mathbf{x} = - \int_0^l 9kc^{2/3} x^{4/3} \cdot d\mathbf{x} = - \frac{27}{7} kc^{2/3} l^{7/3}$$

$$1.13 \quad 18(\text{N})$$

$$1.14 \quad |\Delta \mathbf{P}| = mv_0, \text{ 垂直向下}$$

$$1.15 \quad v = \frac{mv_0 \cos \theta}{M+m}, \quad v_0 \cos \theta \left(1 - \frac{m}{M+m}\right) \mathbf{i} + v_0 \sin \theta \mathbf{j}$$

1.16 解: (1) 取  $m+M$  为一个系统, 因作用时间极短, 作用力极大, 所以在水平方向动量守恒, 即

$$mv_0 = mv + MV$$

$$V = \frac{m(v_0 - v)}{M} = 3.13 \text{ m/s}$$

$$T = Mg + \frac{MV^2}{\ell} = 26.5 \text{ N}$$

(2)  $f\Delta t = mv - mv_0 = -4.7 \text{ N}\cdot\text{s}$ , 与  $v_0$  反向。

1.17 解: 设  $v$  为船对岸的速度,  $u$  为狗对船的速度, 以岸为坐标原点, 船的速度方向为正方向建立  $ox$  坐标系。由于忽略船所受水的阻力, 狗与船组成的系统水平方向动量守恒, 即

$$Mv + m(v+u) = 0$$

即

$$v = \frac{-m}{M+m}u$$

负号表明船对岸的速度  $v$  方向与狗对相船的速度方向相反, 即船沿离开岸的方向运动。狗相对于岸的速度为

$$v+u = \frac{-m}{M+m}u + u = \frac{M}{M+m}u$$

狗相对于岸的位移为

$$L = \int_0^t (v+u) dt = \frac{M}{M+m} \int_0^t u dt = \frac{-M}{M+m}l$$

负号表明狗相对于岸的位移  $L$  的值是负数, 所以负号表示位移  $L$  的方向与  $ox$  坐标轴方向相反, 即狗沿指向岸的方向运动的路程为  $\frac{M}{M+m}l$ 。

狗离湖岸的距离  $S$  为

$$S = S_0 + L = S_0 - \frac{M}{M+m}l$$

1.18 解: 煤粉自料斗口下落, 接触传送带前具有竖直向下的速度

$$v_0 = \sqrt{2gh}$$

设煤粉与  $A$  相互作用的  $\Delta t$  时间内, 落于传送带上的煤粉质量为

$$\Delta m = q_m \Delta t$$

设  $A$  对煤粉的平均作用力为  $\mathbf{f}$ , 由动量定理写分量式

$$f_x \Delta t = \Delta m v - 0$$

$$f_y \Delta t = 0 - (-\Delta m v)$$

将  $\Delta m = q_m \Delta t$  代入得

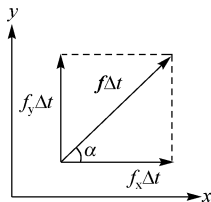
$$f_x = q_m v$$

$$f_y = q_m v_0$$

$$f = \sqrt{f_x^2 + f_y^2} = 149 \text{ N}$$

$\mathbf{f}$  与  $x$  轴正向夹角为

$$\alpha = \arctan\left(\frac{f_y}{f_x}\right) = 57.4^\circ$$



题 1.18 解题图

由牛顿第三定律得煤粉对  $A$  的作用力  $\mathbf{f}' = \mathbf{f} = 149 \text{ N}$ , 方向与图 3.6 中  $\mathbf{f}$  相反。

1.19 A

1.20  $\omega = 36 \text{ rad/s}$

1.21 C

1.22 解:  $R = 0.5 \text{ m}$ ,  $\omega_0 = 900 \text{ rev/min} = 30 \text{ rad/s}$ ,

根据转动定律

$$M = J\beta \quad (1)$$

这里

$$M = -\mu NR \quad (2)$$

其中,  $\mu$  为摩擦系数,  $N$  为正压力,

$$J = \frac{1}{2} m R^2 \quad (3)$$

设在时刻  $t$  砂轮开始停转, 则有  $\omega_t = \omega_0 + \beta t = 0$ , 从而得

$$\beta = \frac{-\omega_0}{t} \quad (4)$$

将式(2)~式(4)代入式(1), 得

$$-\mu NR = \frac{1}{2} mR^2 (-\omega_0 / t)$$

$$\mu = \frac{mR\omega_0}{2Nt} \approx 0.5$$

1.23 解: (1) 根据题意中转速随时间的变化关系, 将  $t=6.0\text{s}$  代入, 即得

$$\omega = \omega_0(1 - e^{-t/\tau}) = 0.95\omega_0 = 8.6\text{ s}^{-1}$$

(2) 角速度随时间变化的规律为

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{\omega_0}{\tau} e^{-t/\tau} = 4.5e^{-t/2} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2}$$

(3)  $t=6.0\text{s}$  时转过的角度为

$$\theta = \int_0^6 \omega dt = \int_0^6 \omega_0(1 - e^{-t/\tau}) dt = 36.9 \text{ rad}$$

则  $t=6.0\text{s}$  时电动机转过的圈数为

$$N = \theta / 2\pi = 5.87$$

1.24 解: 由于卫星在近地点和远地点处的速度方向与椭圆径矢垂直, 因此, 由角动量守恒定律得

$$mr_1v_1 = mr_2v_2 \quad (1)$$

又因卫星与地球系统的机械能守恒, 故有

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{Gmm_E}{r_1} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{Gmm_E}{r_2} \quad (2)$$

式中,  $G$  为引力常量,  $m_E$  和  $m$  分别为地球和卫星的质量,  $r_1$  和  $r_2$  是卫星在近地点和远地点时离地球中心的距离。由式(1)、式(2)可解得卫星在近地点和远地点的速率分别为

$$v_1 = \sqrt{\frac{Gm_E r_2}{r_1(r_1 + r_2)}} = 8.11 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_2 = \frac{r_1}{r_2} v_1 = 6.31 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

1.25 解: (1) 棒绕端点的转动惯量  $J = \frac{1}{3}ml^2$ , 由转动定律  $M = J\alpha$  可得棒在  $\theta$  位置时的角加速度为

$$\alpha = \frac{M(\theta)}{J} = \frac{3g \cos \theta}{2l}$$

当  $\theta = 60^\circ$  时, 棒转动的角加速度  $\alpha = 18.4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ , 由于  $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{\omega d\omega}{d\theta}$ , 根据初始条件对该式变形并对两端积分, 有

$$\int_0^\omega \omega d\omega = \int_0^{60^\circ} \alpha d\theta$$

则角速度为

$$\omega = \sqrt{\frac{3g \sin \theta}{l}} \bigg|_0^{60^\circ} = 7.98 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

(2) 根据机械能守恒, 棒下落至竖直位置时的动能为

$$E_K = \frac{1}{2} mgl = 0.98 \text{ J}$$

(3) 由于该动能也就是转动动能, 即  $E_K = \frac{1}{2} J\omega^2$ , 所以, 棒落至竖直位置时的角速度为

$$\omega' = \sqrt{\frac{2E_K}{J}} = \sqrt{\frac{3g}{l}} = 8.57 \text{ s}^{-1}$$

## 第2章

### 2.1 C

解: A 中小球没有受到回复力的作用。

B 中由于是大角度, 所以  $\theta$  与  $\sin \theta$  不能近似相等, 不能看作简谐振动。

D 中球形木块所受力  $F$  与位移  $x$  不成线性关系, 故不是简谐振动。

### 2.2 B

$$\text{解: } T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad T' = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{3k}} = \frac{\sqrt{6}}{3}T$$

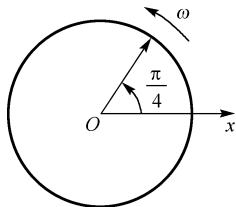
### 2.3 B

$$\text{解: } A \sin(\omega t) = \frac{A}{2} \quad \omega t_0 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$$

$$\omega = \frac{\pi}{6t_0} \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{6t_0}} = 12t_0$$

### 2.4 A

解: 由图知, 初相为  $\frac{\pi}{4}$ , 在  $t$  之内转过  $\pi t$ ,



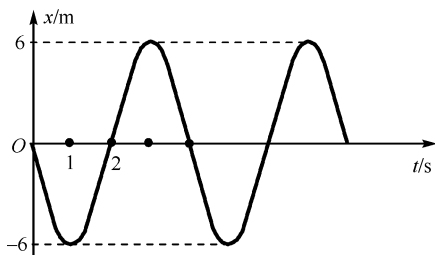


$$t=0, \quad x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}A, \quad v_0 < 0, \quad \text{则 } \phi = \frac{\pi}{4}$$

2.5 A

$$\text{解:} \quad x = 6 \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}\right) \quad v = -3\pi \sin\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$v(2) = -3\pi \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 3\pi \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$



2.6 D

解: 由于位相差为  $\pi$ , 合成后位相与  $x_1$  同相,  $A = A_1 - A_2 = 6 - 2 = 4\text{m}$ 。

$$2.7 \quad \frac{T}{n}$$

$$\text{解: } T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad T' = \frac{2\pi}{n\omega} = \frac{T}{n}。$$

$$2.8 \quad -A\omega \sin(\pi + \phi_0), \quad -A\omega^2 \cos(\pi + \phi_0)$$

$$\text{解: } x = A \cos(\omega t + \phi_0), \quad v\left(\frac{T}{2}\right) = -A\omega \sin(\pi + \phi_0),$$

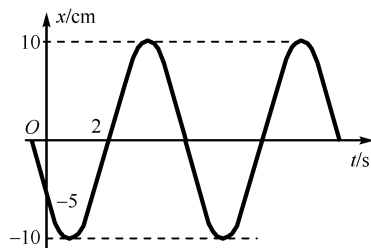
$$a\left(\frac{T}{2}\right) = -A\omega^2 \cos(\pi + \phi_0)。$$

$$2.9 \quad 10\text{cm}, \quad \frac{2}{3}\pi, \quad \frac{24}{5}\text{s}, \quad x = 0.1 \cos\left(\frac{5\pi}{12}t + \frac{2}{3}\pi\right)$$

$$\text{解: } t=0, \quad x_0 = -\frac{A}{2}, \quad v_0 < 0, \quad \text{则 } \phi = \frac{2\pi}{3}。$$

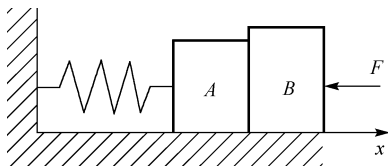
$$2.10 \quad \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{k}} (\sqrt{2} + 1), \quad x_0 \sqrt{\frac{k}{2m}}$$

$$\begin{aligned} \text{解:} \quad T_0 &= 2\pi \sqrt{\frac{2m}{k}} & T_1 &= \frac{T_0}{4} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{2m}{k}} \\ T'_0 &= 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} & T_2 &= \frac{T'_0}{4} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{k}} \end{aligned}$$



$$t = T_1 + T_2 = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{2m}{k}} + \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{k}} (\sqrt{2} + 1)$$

$$\frac{1}{2} k x_0^2 = \frac{1}{2} (2m) v^2 \quad v = x_0 \sqrt{\frac{k}{2m}}$$



2.11  $\frac{3}{8} k A^2$

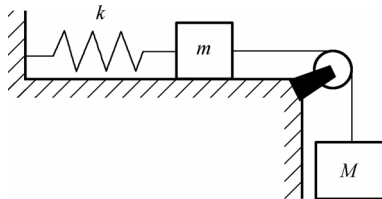
解:  $x = A \cos(\omega t)$ ,  $\frac{A}{2} = A \cos(\omega t)$ ,  $\omega t = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$ ,

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t) = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega t) = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{8} k A^2.$$

2.12

解: 
$$\begin{cases} Mg - T_1 = M \frac{d^2 x_1}{dt^2} \\ T_2 - kx_2 = m \frac{d^2 x_2}{dt^2} \\ \frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{d^2 x_2}{dt^2} = \frac{d^2 x}{dt^2} \\ T_1 = T_2 = T \\ x_1 = x_2 = x \end{cases}$$

$$Mg - kx = (M + m) \frac{d^2 x}{dt^2}$$



令:  $y = Mg - kx$ ,  $\frac{d^2 y}{dt^2} = -k \frac{d^2 x}{dt^2}$

$$y = -\frac{(M+m)}{k} \frac{d^2 y}{dt^2}$$

$$\text{令: } \omega^2 = \frac{k}{M+m} = \frac{k}{4m},$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = 0, \quad y = A \cos(\omega t + \phi), \quad x(t) = \frac{Mg}{k} - \frac{1}{k} A \cos(\omega t + \phi)$$

$$t=0, \quad x(0)=0, \quad Mg = A \cos \phi$$

$$t=0, \quad \frac{dx}{dt} > 0, \quad \frac{dx(0)}{dt} = \frac{1}{k} A \omega \sin \phi$$

$$x(t) = \frac{Mg}{k} - \frac{Mg}{k} \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}t + \pi\right)$$

2.13 D

解:  $t=0$ ,  $x_0 = -A$ ,  $v_0 > 0$ , 则  $\phi = \pi$ 。

2.14 B

解: 因为  $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$  与振幅无关, 故答案为 B。

2.15 C

解:  $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ , 将单摆拿到月球上, 有  $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\frac{g}{6}}} = \sqrt{6} \cdot 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = \sqrt{6}T$ 。

2.16 C

解: 由图知, 振幅  $A = 10\text{m}$ ,  $t=0$ ,  $x_0 = -\frac{A}{2}$ ,  $v_0 > 0$  向正向运动, 则  $\phi = -\frac{2\pi}{3}$ 。

2.17 A

解:  $E = \frac{1}{2}kA^2$ ,  $k = 4k$ ,  $A = \sqrt{\frac{2E}{4k}} = \frac{A}{2}$ 。

2.18 C

解:  $x_1$  和  $x_2$  位相差为  $\frac{\pi}{2}$ , 合成后振幅应为  $\sqrt{A_1^2 + A_2^2}$ 。

2.19  $4T$ ,  $\frac{\sqrt{2}}{2}S$

解: 因为质点在  $A$  点和  $B$  点的速度相同, 所以  $A$ 、 $B$  为相对平衡位置对称的两点, 故可以列出式 (1)。又因为再经过  $T$  后, 质点又一次经过  $B$  点, 故可以列出式 (2)。设式 (3)

中的  $T_0$  为该简谐振动的周期, 振幅为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  s, 则

$$\begin{cases} \pi - 2(\omega t + \phi_0) = \omega T & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(\omega t + \phi_0) = \omega T & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_0 = \frac{2\pi}{\omega} & (3) \end{cases}$$

由式 (1) + 式 (2) 得

$$T = \frac{\pi}{2\omega} \quad (4)$$

将式 (3) 代入式 (4) 得

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\left(\frac{\pi}{2T}\right)} = 4T$$

$$\begin{cases} \frac{S}{2} = A \cos\left(\omega \frac{T}{2} + \pi\right) & (5) \\ T = \frac{\pi}{2\omega} & (6) \end{cases}$$

将 (6) 式代入 (5) 式得:

$$A = \frac{S}{2 \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)} = \frac{S}{2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} S$$

2.20  $2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ , 0,  $x(t) = 2 \cos 2t$ ,  $12\sqrt{2} \text{ N}$ , 负方向

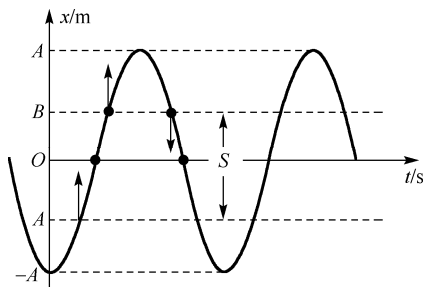
解:  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{12}{3}} = 2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $t = 0$ ,  $x_0 = A$ ,  $v_0 < 0$ , 则  $\phi = 0$ 。

$$x(t) = 2 \cos 2t \quad \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -8 \cos 2t \quad F(t) = m \frac{d^2 x}{dt^2} = -24 \cos 2t$$

$$F\left(\frac{\pi}{8}\right) = -24 \cos \frac{\pi}{4} = -12\sqrt{2} \text{ N}$$

2.21

解: 
$$v = -2 \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right), \quad a = -2 \cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$$



$$\frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2}(2m)v^2 \quad v = x_0\sqrt{\frac{k}{2m}}$$

$$2.22 \quad \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

解:

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2}mv^2 \\ &= \frac{1}{2}mA^2 \left( \sqrt{\frac{k}{m}} \right)^2 \sin^2 \left( \sqrt{\frac{k}{m}}t + \pi \right) \\ &= \frac{1}{2}kA^2 \cos^2 \left( \sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{3\pi}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2}kA^2 \left[ \frac{1}{2} \left( 1 + \cos \left( 2\sqrt{\frac{k}{m}}t + 3\pi \right) \right) \right] \\ &= \frac{1}{4}kA^2 \left( 1 + \cos \left( 2\sqrt{\frac{k}{m}}t + \pi \right) \right) \\ &= \frac{1}{4}kA^2 \left( 1 - \cos 2\sqrt{\frac{k}{m}}t \right) \end{aligned}$$

$$\gamma = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\begin{aligned} E_p &= \frac{1}{2}kx^2 \\ &= \frac{1}{2}kA^2 \cos^2 \left( \sqrt{\frac{k}{m}}t + \pi \right) \\ &= \frac{1}{2}kA^2 \left[ \frac{1}{2} \left( 1 + \cos \left( 2\sqrt{\frac{k}{m}}t + 2\pi \right) \right) \right] \\ &= \frac{1}{4}kA^2 \left( 1 + \cos 2\sqrt{\frac{k}{m}}t \right) \end{aligned}$$

$$\gamma = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

2.23 解: 由于位相差为  $\pi$ , 合成后位相与  $x_1$  同相即为  $\pi$ ,  $A = A_1 - A_2$ 。

2.24 解: 设  $x = A \cos(\omega t + \phi)$ ,  $v = -A\omega \sin(\omega t + \phi)$

$\omega A = 10$ ,  $t = 0$ ,  $v(0) = -10 \sin \phi = -5$ , 得

$$\sin \phi = \frac{1}{2}$$

$$\phi = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

$t = 4$  时, 由  $\sin\left(4\omega + \frac{\pi}{6}\right) = 1$  得  $4\omega + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ , 故  $\omega = \frac{\pi}{12}$

所以  $A = \frac{120}{\pi}$ ,  $x = \frac{120}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{12}t + \frac{\pi}{6}\right)$ 。

### 第3章

3.1 B

3.2 D

3.3 C

3.4 C

3.5 A

3.6 D

$$3.7 \quad a = -0.2\pi^2 \cos\left(\pi t + \frac{3}{2}\pi x\right) (\text{SI})$$

$$3.8 \quad y = 2 \times 10^{-3} \cos\left(200\pi - \frac{1}{2}\pi x - \frac{1}{2}\pi\right) (\text{SI})$$

$$3.9 \quad 5.0 \times 10^4, \quad 2.86 \times 10^{-2} \text{m}, \quad 1.43 \times 10^3 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$3.10 \quad (1) \quad 2k\pi + 9\pi/2, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad (2) \quad 2k\pi + 3\pi/2, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$3.11 \quad y = A \cos\left[2\pi\nu\left(t + \frac{x+L}{\lambda\nu}\right) + \frac{\pi}{2}\right], \quad t_1 + \frac{L}{\nu\lambda} + \frac{k}{\nu}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$3.12 \quad \text{解: 已知 } \nu = 30, \quad u = 0.50 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}, \quad \overline{AB} = d = 0.10 \text{m}, \quad \overline{AP} = r = 4 \text{m}, \quad \lambda = \frac{u}{\nu} = 1.67 \times$$

$10^{-2} \text{m}$ 。

根据余弦定理

$$BP = 3.9 \text{m}$$

相位差为

$$\Delta\phi = \frac{2\pi\Delta r}{\lambda} = 2\pi \frac{AP - BP}{\lambda} = 12\pi$$

3.13 解: (1) 已知波的表达式为

$$y = 0.05 \cos(100\pi t - 200\pi x)$$

与标准形式:  $y = A \cos(2\pi\nu t - 2\pi x/\lambda)$  比较, 得

振幅  $A = 0.05 \text{ m}$ , 波速  $u = \lambda\nu = 50 \text{ m/s}$ , 频率  $\nu = 50 \text{ Hz}$ , 波长  $\lambda = 1.0 \text{ m}$ 。

(2) 最大振动速度和最大振动加速度分别为

$$v_{\max} = (\partial y / \partial t)_{\max} = 2\pi\nu A = 15.7 \text{ m/s}$$

$$a_{\max} = (\partial^2 y / \partial t^2)_{\max} = 4\pi^2\nu^2 A = 4.93 \times 10^3 \text{ m/s}^2$$

(3)  $x_1 = 0.2 \text{ m}$  处和  $x_1 = 0.7 \text{ m}$  处二质点振动的相位差为

$$\Delta\phi = 2\pi(x_2 - x_1)/\lambda = \pi, \text{ 二振动反相。}$$

3.14 解: (1)  $x = \frac{\lambda}{4}$  处,  $y_1 = A \cos\left(2\pi\nu t - \frac{\pi}{2}\right)$ ,  $y_2 = 2A \cos\left(2\pi\nu t - \frac{1}{2}\pi\right)$

因为  $y_1$ 、 $y_2$  反相, 所以合振动振幅  $A_s = 2A - A = A$ , 且合振动的初相  $\phi$  和  $y_2$  的初相一样为  $\frac{1}{2}\pi$ 。

合振动方程为

$$y = A \cos\left(2\pi\nu t - \frac{1}{2}\pi\right)$$

(2)  $x = \frac{\lambda}{4}$  处质点的速度为

$$v = dy / dt = -2\pi\nu A \sin\left(2\pi\nu t + \frac{1}{2}\pi\right) = 2\pi\nu A \cos(2\pi\nu t + \pi)$$

## 第 4 章

4.1 A

4.2 D

4.3 A

4.4 C

4.5 C

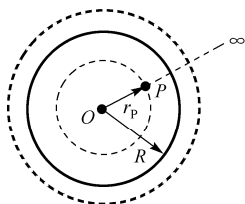
4.6 B

4.7  $3 + 2\sqrt{2}$

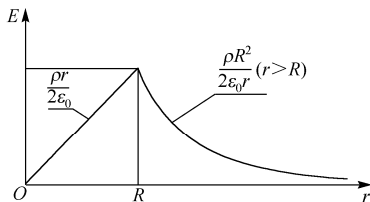
4.8  $\frac{q}{4\pi\epsilon_0 d(L+d)}$ , 方向沿杆的延长线方向

4.9 0.90 N, 方向向左

4.10  $E = \begin{cases} \frac{\rho r}{2\epsilon_0} (r < R) \\ \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r} (r > R) \end{cases};$



(a)



(b)

4.11 解: (1) 略

(2) 利用补偿法, 可将其看成是带有电荷体密度为  $\rho$  的大球和带有电荷体密度为  $-\rho$  的小球的合成.  $E = E_{P_1} + E_{P_2} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left( d - \frac{r^3}{4d^2} \right)$ , 方向从  $O$  指向  $P$ 。

4.12 解:

(1)  $r < R$  时,  $E_{\text{内}} = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3};$

(2)  $r > R$  时,  $E_{\text{外}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2};$

离球心  $r$  处 ( $r < R$ ) 的电势  $U_r = \int_r^R E_{\text{内}} \cdot dr + \int_R^\infty E_{\text{外}} \cdot dr$ , 即

$$U_r = \int_r^R \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} \cdot dr + \int_R^\infty \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot dr = \frac{3Q}{8\pi\epsilon_0 R} - \frac{Qr^2}{8\pi\epsilon_0 R^3}$$

4.13 解: (1) 当  $r < r_1$  时,  $E_1 = 0$ , 当  $r_1 < r < r_2$  时,  $E_2 = \frac{\sigma r_1^2}{\epsilon_0 r^2}$ , 当  $r > r_2$  时,

$$E_3 = \frac{\sigma(r_1^2 + r_2^2)}{\epsilon_0 r^2}.$$

$$U_0 = \int_{r_1}^{r_2} E_2 \cdot dr + \int_{r_2}^\infty E_3 \cdot dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\sigma r_1^2}{\epsilon_0 r^2} dr + \int_{r_2}^\infty \frac{\sigma(r_1^2 + r_2^2)}{\epsilon_0 r^2} dr = \frac{\sigma}{\epsilon_0} (r_1 + r_2)$$



$$\sigma = \frac{\varepsilon_0 U_0}{r_1 + r_2} 8.85 \times 10^{-9} \text{ C/m}^2$$

(2) 设外球面上放电后电荷密度  $\sigma'$ , 则有  $U'_0 = (\sigma r_1 + \sigma' r_2) / \varepsilon_0 = 0$ , 因此

$$\sigma' = -\frac{\sigma r_1}{r_2} = -\frac{\sigma}{2}$$

应放掉电荷为  $\Delta q = 4\pi r_2^2 (\sigma - \sigma') = \frac{3}{2} \sigma \cdot 4\pi r_2^2 = 6.67 \times 10^{-9} \text{ C}$ 。

4.14 B

4.15 B

4.16 D

4.17 A

4.18 D

4.19  $(1 + 2\sqrt{2})q / 4$

$$4.20 \quad \frac{\lambda_1 \lambda_2 R}{2\varepsilon_0} \left[ \frac{1}{R} - \frac{1}{(l^2 + R^2)^{1/2}} \right]$$

$$4.21 \quad \frac{-Q}{\pi^2 \varepsilon_0 R^2} \mathbf{j}$$

$$4.22 \quad \frac{\lambda^2}{4\pi\varepsilon_0} \ln \frac{4}{3}$$

$$4.23 \quad E = \begin{cases} E = 0 & r < R_1 \\ E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \hat{r} & R_1 < r < R_2 \\ E = 0 & r > R_2 \end{cases}$$

4.24 解: 由高斯定理得  $\int_0^{x_0} \rho(x) dx = \int_0^{x_0} \varepsilon_0 c dx$ ,  $\rho(x)$  为常数  $\Rightarrow \rho = \varepsilon_0 c$ 。

4.25 解: 当  $r < R_1$  时,  $E_1 = 0$ , 当  $R_1 < r < R_2$  时,  $E_2 = \frac{\rho(r^3 - R_1^3)}{3\varepsilon_0 r^2}$ ,

当  $r > R_2$  时,  $E_3 = \frac{\rho(R_2^3 - R_1^3)}{3\varepsilon_0 r^2}$ , 以无穷远处为电势零点, 则

$$U = \int_{R_1}^{R_2} E_2 \cdot d\mathbf{r} + \int_{R_2}^{\infty} E_3 \cdot d\mathbf{r} = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} (R_2^2 - R_1^2)$$

4.26 解: (1) 以  $O$  点为坐标原点, 有一均匀带电细线的方向为  $x$  轴,  $E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

( $r > R$ )。

取细线上的微元:  $dq = \lambda dl = \lambda dr$ , 有  $d\mathbf{F} = E dq$ ,

$$\mathbf{F} = \int_{r_0}^{r_0+l} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x^2} \lambda dr = \frac{\lambda q l \hat{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon_0 r_0(r_0+l)} \quad (\hat{\mathbf{r}} \text{ 为 } \mathbf{r} \text{ 方向上的单位矢量})$$

(2) 均匀带电球面在球面外的电势分布为  $U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$  ( $r > R$ ,  $\infty$  为电势零点), 因此

$$W = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_0}^{r_0+l} \frac{\lambda dr}{r} = \frac{q\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_0+l}{r_0}$$

## 第 5 章

5.1  $6.67 \times 10^{-9} \text{C}$ ,  $1.33 \times 10^{-9} \text{C}$ ,  $6.0 \times 10^3 \text{V}$

5.2 内表面上有感生电荷  $-q$ , 外表面上带电荷  $q+Q$ ,  $\frac{\mu_0 I v}{\pi} \ln \frac{r+l}{r}$ ,  $\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) +$

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 b}$$

$$5.3 \quad \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{r}{R}$$

5.4 147kV

5.5  $D=0$ ,  $E=0$ , ( $r < a$ );  $\mathbf{D} = [\lambda / (2\pi r)] \mathbf{r}_0$  ( $r > a$ ),  $\mathbf{E}_1 = [\lambda / (2\pi\epsilon_0\epsilon_r r)] \mathbf{r}_0$  ( $a < r < b$ ),  $\mathbf{E}_2 = [\lambda / (2\pi\epsilon_0 r)] \mathbf{r}_0$  ( $r > b$ ),  $\mathbf{r}_0$  为径向单位矢量。

5.6 球内:  $D_1 = k/2$ ,  $\mathbf{D}_1 = D_1 \hat{\mathbf{r}}$ ,  $\hat{\mathbf{r}}$  为径向单位矢量,  $E_1 = k/(2\epsilon_0\epsilon_r)$ ,  $\mathbf{E}_1 = E_1 \hat{\mathbf{r}}$ ;

球外:  $D_2 = kR^2 / (2r^2)$ ,  $\mathbf{D}_2 = D_2 \hat{\mathbf{r}}$ ,  $E_2 = kR^2 / (2\epsilon_0 r^2)$ ,  $\mathbf{E}_2 = E_2 \hat{\mathbf{r}}$ 。

$$5.7 \quad P_1 = \left( 1 - \frac{1}{\epsilon_{r1}} \right) \frac{Q}{S}, \quad P_2 = \left( 1 - \frac{1}{\epsilon_{r2}} \right) \frac{Q}{S}$$

$$5.8 \quad \text{球内: } E_1 = (\rho r_1) / (3\epsilon_1), \quad U_1 = \frac{\rho}{6} \left[ \left( \frac{1}{\epsilon_1} + \frac{2}{\epsilon_2} \right) R^2 - \frac{r_1^2}{\epsilon_1} \right] \quad (r_1 < R);$$

$$\text{球外: } E_2 = \rho R^3 / (3\epsilon_2 r_2^2), \quad U_2 = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_2 r_2}, \quad (r_2 > R)。$$

$$5.9 \quad D = \rho_0 \left( \frac{r}{3} - \frac{r^2}{4R} \right), \quad \mathbf{D} = D \hat{\mathbf{r}}, \quad E = \frac{\rho_0}{\epsilon_0 \epsilon_r} \left( \frac{r}{3} - \frac{r^2}{4R} \right), \quad \mathbf{E} = E \hat{\mathbf{r}}, \quad \hat{\mathbf{r}} \text{ 为径向单位矢量};$$

$r = 2R/3$  处  $E$  最大。

$$5.10 \quad P = \frac{(\epsilon_r - 1)Q}{4\pi\epsilon_r r^2}, \quad \sigma'_a = \frac{(1 - \epsilon_r)Q}{4\pi\epsilon_r a^2}, \quad \sigma'_b = \frac{(\epsilon_r - 1)Q}{4\pi\epsilon_r b^2}$$

$$5.11 \quad \frac{\pi \varepsilon_0}{\ln \frac{d-R}{R}}$$

$$5.12 \quad C = (2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r L) / [\ln(b/a)], \quad W = [Q^2 / (4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r L)] \ln(b/a)$$

## 第 6 章

6.1 C

6.2 B

6.3 B

6.4 B

$$6.5 \quad \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2}, \text{ 方向垂直 } I_1 \text{ 向右}$$

$$6.6 \quad \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left( \frac{3\pi}{2a} + \frac{\sqrt{2}}{b} \right)$$

$$6.7 \quad \frac{\mu_0 I}{4\pi a \cos \theta} (1 + \sin \theta - \cos \theta), \text{ 方向垂直纸面向外}$$

$$6.8 \quad (\sqrt{2}R/a)^3 B_0$$

$$6.9 \quad \frac{\mu_0 I}{4\pi l} (2\sqrt{3} - 3), \text{ 方向垂直纸面向里}$$

$$6.10 \quad \frac{\mu_0}{2} \left[ \frac{\mu_0 R_1^2 I_1}{[R_1^2 + (b+x)^2]^{3/2}} - \frac{\mu_0 R_2^2 I_2}{[R_2^2 + (b-x)^2]^{3/2}} \right]$$

$$6.11 \quad 0 < r < R_1 \text{ 区域: } H = \frac{Ir}{2\pi R_1^2}, \quad B = \frac{\mu_0 Ir}{2\pi R_1^2};$$

$$R_1 < r < R_2 \text{ 区域: } H = \frac{I}{2\pi r}, \quad B = \frac{\mu I}{2\pi r};$$

$$R_2 < r < R_3 \text{ 区域: } H = \frac{I}{2\pi r} \left( 1 - \frac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2} \right), \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \left( 1 - \frac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2} \right);$$

$$r > R_3 \text{ 区域: } H = 0, \quad B = 0.$$

$$6.12 \quad 200 \text{ A/m}, \quad 1.06 \text{ T}$$

$$6.13 \quad 496$$

6.14 略

## 第 7 章

7.1 ①C, ②选 D

7.2 B

7.3 (1) 环中的感应电动势  $\varepsilon_1 = 0$ ; (2)  $\varepsilon_{ab} = Bv \cdot 2R = 2BvR$

$$7.4 \quad -\frac{\mu_0 I_0 a \omega}{2\pi} \ln \left[ \frac{(r_1 + b)(r_2 + b)}{r_1 r_2} \right] \cos \omega t$$

$$7.5 \quad \frac{\mu_0 I b}{2\pi a} \left( \ln \frac{a+d}{d} - \frac{a}{a+d} \right) v, \quad ACBA \text{ 顺时针方向}$$

7.6 略

$$7.7 \quad \frac{\mu_0 I l v}{2\pi} \left( \frac{1}{a+vt} - \frac{1}{a+b+vt} \right), \quad \text{沿 } ABCD \text{ 顺时针方向}; \quad -\frac{\mu_0 I_0 \omega}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a} \cos \omega t;$$

$$\frac{\mu_0 I_0 \sin \omega t l v}{2\pi} \left( \frac{1}{a+vt} - \frac{1}{a+b+vt} \right) - \frac{\mu_0 I_0 \omega}{2\pi} \ln \frac{b+b+vt}{a+vt} \cos \omega t.$$

$$7.8 \quad 3\mu_0 \pi r^2 I v / (2N^4 R^2)$$

$$7.9 \quad B \tan \theta v^2 t, \quad \text{在导体 } MN \text{ 内 } \varepsilon_i \text{ 方向由 } M \text{ 向 } N; \quad K v^3 \tan \theta \left( \frac{1}{3} \omega t^3 \sin \omega t - t^2 \cos \omega t \right).$$

$$7.10 \quad \frac{\mu_0 I v}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a-b}$$

$$7.11 \quad \varepsilon_i = -\pi \cos 10\pi t \text{ (V)}; \quad \varepsilon_i = -3.14 \text{ V}$$

$$7.12 \quad \oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I + I_d = \iint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} + \iint_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

7.13 解: 霍尔效应中霍尔电压  $U_H$  与电流  $I$  及磁感应强度  $B$  的关系为

$$U_H = R_H \frac{IB}{d}$$

式中  $d$  为元件片的厚度,  $R_H = 1/nq$  为霍尔系数, 代入数据, 可得霍尔电压为

$$U_H = \frac{IB}{ndq} = 42 \mu\text{V}$$

当  $n = 1.0 \times 10^{20} \text{ m}^{-3}$  时, 霍尔电压为

$$U_H = \frac{IB}{ndq} = 0.417 \text{ V}$$

$$7.14 \quad \text{解根据公式 } w_e = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \text{ 和 } w_m = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}$$

按题意, 当  $w_e = w_m$  时, 有

$$\frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}$$

则

$$E = \frac{B}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 1.5 \times 10^8 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

7.15  $\frac{1}{2}\omega BL^2 \sin^2 \theta$ , 方向沿着杆指向上端

7.16  $\frac{\mu_0 I v}{\pi} \ln \frac{r+l}{r}$ , 方向从  $D$  向  $E$

7.17 1.26 A

7.18 略

## 第 8 章

8.1 A

8.2 A

8.3 B

8.4 D

8.5 C

8.6 D

8.7 A

8.8 B

8.9 C

8.10 C

8.11 D

8.12 B

8.13 D

8.14 (1) 沿空间各个方向运动的分子数目相等; (2)  $\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2}$

8.15  $3.21 \times 10^3$

8.16  $\frac{1}{2}ikT$ ,  $RT$

8.17 绝热过程, 等压过程, 等压过程

8.18 3, 133.3J

8.19  $7.48 \times 10^3 \text{ J}$ ,  $7.48 \times 10^3 \text{ J}$

8.20 概率小的状态向概率大的状态, 不可逆的

8.21 解: 由图可看出

$$p_A V_A = p_C V_C$$

从状态方程

$$pV = \nu RT$$

可知  $T_A = T_C$ , 因此全过程  $A \rightarrow B \rightarrow C$  的  $\Delta E = 0$ ,  $B \rightarrow C$  过程是绝热过程, 有  $Q_{BC} = 0$ ,

A→B 过程是等压过程, 有

$$Q_{AB} = \nu C_p (T_B - T_A) = \frac{5}{2} (p_B V_B - p_A V_A) = 14.9 \times 10^5 \text{ J}$$

故全过程 A→B→C 的  $Q = Q_{BC} + Q_{AB} = 14.9 \times 10^5 \text{ J}$ .

根据热力学第一定律  $Q = W + \Delta E$ , 得全过程 A→B→C 的

$$W = Q - \Delta E = 14.9 \times 10^5 \text{ J}$$

8.22 解: (1) 由理想气体的状态方程

$$pV = \frac{M}{\mu} RT$$

和刚性双原子分子理想气体内能公式

$$E = \frac{M}{\mu} \frac{5}{2} RT$$

联立可得

$$\frac{pV}{E} = \frac{2}{5}$$

得到

$$p = \frac{2E}{5V} = \frac{2}{5} \cdot \frac{6.75 \times 10^2}{2.0 \times 10^{-3}} \text{ Pa} = 1.35 \times 10^5 \text{ Pa}$$

(2) 由刚性双原子分子理想气体内能公式

$$E = \frac{M}{\mu} \frac{5}{2} RT$$

解得

$$\bar{\omega} = \frac{3}{2} kT = \frac{3}{2} \times 1.38 \times 10^{-23} \cdot 362 = 7.5 \times 10^{-21} \text{ J}$$

8.23 解: 应用绝热方程

$$T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1}$$

得

$$\frac{V_3}{V_2} = \left( \frac{T_1}{T_2} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (1)$$

由卡诺循环效率

$$\eta = 1 - T_2 / T_1$$

得

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{1}{1-\eta}$$

故 
$$\frac{V_3}{V_2} = \left( \frac{1}{1-\eta} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (2)$$

单原子理想气体

$$\gamma = \frac{i+2}{2} = \frac{5}{3}$$

已知  $\eta = 0.2$ ，将  $\gamma$ 、 $\eta$  的值代入式 (2)

得

$$\frac{V_3}{V_2} \approx 1.4$$

8.24 解：已知  $L = 10^{-7} \text{ m}$ ， $P = 10^{-5} \text{ mmHg}$ ， $d = 3 \times 10^{-10} \text{ m}$ ，

(1) 分子数密度

$$n = \frac{p}{KT} = \frac{10^{-5} \times 1.013 \times 10^5}{76 \times 1.38 \times 10^{-23} \times 300} = 3.22 \times 10^{17} \text{ m}^{-3}$$

(2) 平均碰撞频率

$$\bar{Z} = \sqrt{2} \pi d^2 n \bar{v}$$

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}} = \sqrt{\frac{8 \times 8.31 \times 300}{3.14 \times 29 \times 10^{-3}}} = 468 \text{ m/s}$$

$$\bar{Z} = \sqrt{2} \pi d^2 n \bar{v} = \sqrt{2} \times 3.14 \times 9 \times 10^{-20} \times 3.28 \times 10^{19} \times 468 = 60 \text{ m/s}$$

(3) 平均自由程

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n} = \frac{1}{\sqrt{2} \times 3.14 \times 9 \times 10^{-20} \times 3.28 \times 10^{19}} = 7.79 \text{ cm}$$

由于

$$\bar{\lambda} = 7.79 \times 10^{-2} > L = 10^{-2}, \quad \bar{\lambda}' \approx L = 10^{-2}$$

故实际上

$$\bar{Z}' = \frac{\bar{v}'}{\bar{\lambda}'} = 4.68 \times 10^4 \text{ m/s}$$

## 第9章

9.1 (1) A (2) D (3) B

9.2 (1) C (2) B

9.3 D

9.4 B

9.5 (1) 设激光束直径为, 地面到月球的距离为  $h$ , 在月球表面, 激光束形成艾里斑的直径为  $D$ , 则有  $D = 2h\theta$ 。

艾里斑的角距离为  $\theta = 1.22 \frac{\lambda}{d}$

所以,

$$\begin{aligned} D &= 2h\theta = 1.22 \frac{2l\lambda}{d} \\ &= 1.22 \times \frac{2 \times 3.84 \times 10^8 \times 632.8 \times 10^{-9}}{2 \times 10^{-3}} = 2.96 \times 10^5 \text{ m} \end{aligned}$$

(2) 若激光束扩束为  $d'$ , 则艾里斑直径为

$$D' = \frac{d}{d'} D = \frac{2 \times 10^{-3}}{2} \times 2.96 \times 10^5 = 296 \text{ m}$$

9.6  $60^\circ$ 

9.7 分析: 本题是等厚干涉问题, 关键是确定各处空气膜的厚度。对于上面是平凸透镜, 下面是平板玻璃的一般牛顿环装置, 在某处的空气膜厚度为  $d_1 = r^2 / 2R_1$ , 现用凹面镜取代平板玻璃, 该处空气膜的厚度要减小  $d_2 = r^2 / 2R_2$ 。

解: 某处空气膜的厚度为

$$\Delta d = r^2 / 2R_1 - r^2 / 2R_2 \quad (1)$$

暗环的干涉条件为

$$2n\Delta d + \frac{\lambda}{2} = (2k+1) \frac{\lambda}{2}$$

简化后得

$$2n\Delta d = k\lambda \quad (2)$$

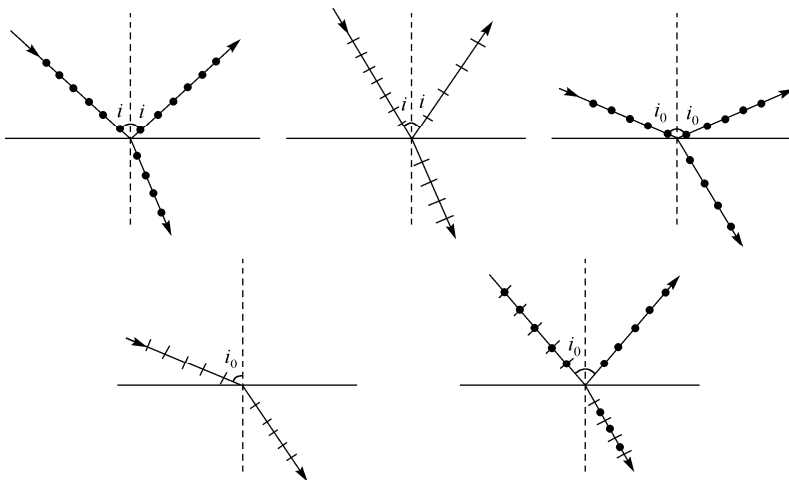
将式 (2) 代入式 (1), 并注意到  $k=4$ ,  $n=1$ , 可得

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_1} - \frac{4\lambda}{r^2} = \frac{1}{1.028} - \frac{4 \times 589.3 \times 10^{-9}}{(2.25 \times 10^{-2})^2} = 0.968 \text{ m}^{-1}$$

所以,  $R_2 = 1.03 \text{ m}$ 。



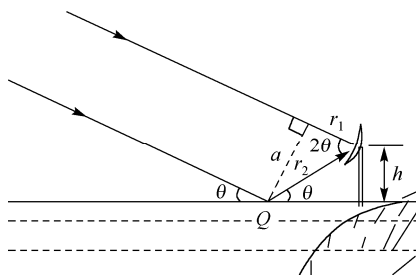
9.8



9.9 分析: 天线接收到的电磁波一部分直接来自恒星, 另一部分来自经湖面的反射波, 由于恒星位于对岸地平线上方, 入射于湖面的掠射角  $\theta$  很小, 反射时将发生“半波损失”, 这两部分电磁波是相干波, 在接收天线处的波程差随  $\theta$  而变, 在恒星升起的过程中, 射电望远镜所接收到的电磁波由于干涉, 其强度时而加强, 时而减弱。

解: 来自远方恒星的电磁波可视为平面波, 如题图所示, 反射波在  $Q$  点反射时有“半波损失”,  $h$  处的天线测得第一级干涉极大时, 有

$$\delta = (r_2 + \frac{\lambda}{2}) - r_1 = \lambda$$



题 9.9 图

根据图示的几何关系, 可得

$$\begin{aligned} r_1 &= r_2 \cos 2\theta \\ h &= r_2 \sin \theta \end{aligned}$$

所以

$$\delta = r_2(1 - \cos 2\theta) + \frac{\lambda}{2} = 2h \sin \theta + \frac{\lambda}{2} = \lambda$$

由于  $\sin \theta \approx \theta$ ，所以

$$\theta = \frac{\lambda}{4h}$$

9.10 分析：将已知条件代入光栅方程，不难求得光栅常量，并进一步计算得到光栅缝数，只有当衍射角  $\phi$  小于  $90^\circ$  时，相应的条纹才能够在屏幕上出现。由此可以判断在屏幕上是否能看到第二级条纹。

解：由光栅方程

$$d \sin \phi = k\lambda$$

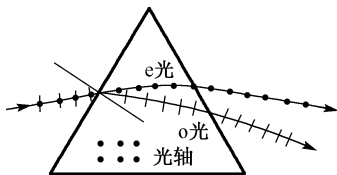
已知  $\phi = 30^\circ$ ， $k = 1$ ，可得

$$d = \frac{k\lambda}{\sin \phi} = 1.265 \times 10^{-6} \text{ m}$$

$$N = \frac{0.01}{d} = 7905$$

由光栅方程可知， $\sin \phi = k\lambda / d$ ，当  $k = 2$  时， $2\lambda / d = 1.0005 > 1$ ，显然，第二级明纹不会出现。

9.11



## 第 10 章

10.1 ①B; ②C

10.2 C

10.3 C

10.4 C

10.5 D

10.6 D

10.7  $m / ls$ ， $m / ls(1 - (u/c)^2) = 25m / 9ls$

10.8 解：设静止质量为  $m_0$ ，运动质量为  $m$ ，由题设  $\frac{m - m_0}{m_0} = 0.10$  且  $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}$  可得

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 = 0.10 \Rightarrow \sqrt{1-\beta^2} = \frac{1}{1.10}$$

设物体在运动方向上的长度和静长分别为  $l$  和  $l_0$ ，则相对收缩量为

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l_0 - l}{l_0} = 1 - \sqrt{1-\beta^2} = 1 - \frac{1}{1.10} = 0.091 = 9.1\%$$

10.9 解：在地面参照系中：

两接收站同时收到信号

$$t_W = t_E$$

两站位置关系为

$$x_E = x_W + 2L_0$$

在飞机参照系有

$$t'_W = \frac{t_W - vx_W/c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \quad t'_E = \frac{t_E - vx_E/c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

$$\Delta t' = t'_W - t'_E = \frac{\Delta t + (v/c^2)(x_E - x_W)}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{0 + (v/c^2)2L_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{2L_0 v}{c^2 \sqrt{1-(v/c)^2}}$$

10.10 解：取飞船为  $k$  系，地面为  $k'$  系，则  $V = v_{\text{飞船}} = 0.98c$ ，由

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad \text{与} \quad t = \frac{t' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

得

$$\Delta x = \frac{\Delta x' + V\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad \Delta t = \frac{\Delta t' + \frac{V}{c^2}\Delta x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

其中， $\Delta x' = 100\text{m}$ ， $\Delta t' = 10\text{s}$ ，则  $\Delta x = 1.48 \times 10^{10}\text{m}$ ， $\Delta t = 50.5\text{s}$ 。

注：由于  $v' = v_{\text{选手}} = 10\text{m/s}$ ，所以从飞船上看，选手的速为  $v = \frac{v' + V}{1 + \frac{V}{c^2}v'} = 2.938 \times 10^8\text{m/s}$ 。

则从飞船上看，选手跑的距离为  $\Delta x = v\Delta t = 1.48 \times 10^{10}\text{m}$ 。

10.11 解：在地面上观察火箭发射导弹时的时间为

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 12.5\text{s}$$

发射导弹时距离地面的高度为

$$h = v\Delta t$$

导弹落到地面的时间为

$$\Delta t_1 = \frac{h}{v_1} = 25\text{s}$$

则从火箭发射到导弹到达地面，时间间隔为

$$\Delta t_0 = \Delta t + \Delta t_1 = 37.5\text{s}$$

10.12 解：孤立系统在裂变过程中释放出动能，引起静能减少，相应的静止质量减少，即静质量亏损。设裂变产生的两个粒子的静质量分别为  $m_{10}$  和  $m_{20}$ ，其相应的速度分别为  $v_1 = 0.6c$ ， $v_2 = 0.8c$ 。由于孤立系统中所发生的任何过程都同时遵守动量守恒定律和能(质)量守恒定律，所以有

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = \frac{m_{10}}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} v_1 + \frac{m_{20}}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}} v_2 = 0 \quad (1)$$

$$m_1 + m_2 = \frac{m_{10}}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} + \frac{m_{20}}{1 - \sqrt{\frac{v_2^2}{c^2}}} = m_0 \quad (2)$$

注意， $m_1$  和  $m_2$  必沿相反方向运动，动量守恒的矢量方程可以简化为一维标量方程，再将  $v_1 = 0.6c$ ， $v_2 = 0.8c$  代入式 (1)、式 (2)，分别得到

$$\frac{6}{8} m_{10} = \frac{8}{6} m_{20}$$

$$\frac{m_{10}}{0.8} + \frac{m_{20}}{0.6} = m_0$$

联立以上二式求解可得

$$m_{10} = 0.459m_0, \quad m_{20} = 0.257m_0$$

故静质量亏损  $\Delta m = m_0 - (m_{10} + m_{20}) = 0.284m_0$ 。由静质量亏损引起静能减少，即转化为动能，故放出的动能为

$$\Delta E_k = \Delta mc^2 = 0.284m_0 c^2$$

## 第 11 章

11.1 D

11.2 B

11.3 B

11.4 入射光的能量为  $\varepsilon = \frac{hc}{\lambda} = 4.13 \text{ eV}$ , 可见入射光的能量大于锂的逸出功, 却小于汞的逸出功, 因此锂会产生光电效应。由爱因斯坦方程可知, 光电子的最大动能为

$$E_k = \frac{hc}{\lambda} - W = (4.13 - 2.30) \text{ eV} = 1.83 \text{ eV}$$

11.5  $0.659 \times 10^{-7} \text{ eV}$ ,  $367.0 \text{ nm}$ ,  $7.13 \times 10^{-6} \text{ nm}$ 

11.6 分析: 根据质能关系, 电子的总能量与静能之比等于其动质量与静质量之比, 由相对论质量与速度的关系可求出速度, 进而求出电子的动量, 电子的动能等于总能量与其静能之差。

解: 由公式  $E = mc^2$  和  $E_0 = m_0 c^2$  可知

$$\frac{E}{E_0} = \frac{m}{m_0} = 5$$

由  $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ , 求得电子速率为

$$v = \frac{\sqrt{24}}{5} c = 2.9 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

电子动量为

$$p = mv = \sqrt{24} m_0 c = 1.34 \times 10^{-21} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

电子能量为

$$E_k = E - E_0 = 4m_0 c^2 = 3.28 \times 10^{-13} \text{ J}$$

11.7 解:  $d$  分壳层就是量子数  $l = 2$  分壳层, 所以

$$z_l = 2(2l+1) = 10, \quad m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \quad m_s = \pm \frac{1}{2}$$

11.8 分析: 光子的静止质量  $m_0 = 0$ , 静能量  $E_0 = 0$ , 其动能、动量可由德布罗意关系式  $E = h\nu$  和  $p = \frac{h}{\lambda}$  求得。

解: 由于光子与电子的波长相同, 它们的动量均为

$$p = \frac{h}{\lambda} = 3.32 \times 10^{-24} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

光子的动能为

$$E_k = E = pc = 6.22 \text{ keV}$$

因电子的相对论动能  $E_k = pc$  ( $6.22\text{KeV}$ )  $\ll E_0$  ( $0.512\text{MeV}$ ), 故可以忽略相对论效应, 电子的动能可用公式  $E_k = \frac{p^2}{2m}$  计算, 即

$$E_k = \frac{p^2}{2m} = 37.8\text{eV}$$

## 第 12 章

12.1 ① 原胞: 组成晶体的最小重复单元, 设  $\mathbf{a}_1$ 、 $\mathbf{a}_2$ 、 $\mathbf{a}_3$  为基矢, 由它们转成的平行六面体叫原胞。

② 空间点阵: 晶体中微粒的重心做周期性排列组成的骨架, 称为晶格。微粒重心位置称为格点。这些格点的总体称为空间点阵 (简称点阵)。简言之, 空间点阵就是晶体中微粒重心位置的几何点的总体。

12.2 略

12.3 解: 设晶胞边长为  $a$ , 则  $V = a^3$ ; 而原子半径  $r = \frac{a}{2}$ , 则原子球的体积为  $\frac{4}{3}\pi r^3$ ; 一个晶胞内原子球的个数为  $\frac{1}{8} \times 8 = 1$ , 所以, 晶胞内原子球的体积为

$$v_c = 1 \times \frac{4}{3}\pi r^3$$

由致密度公式得

$$\eta = \frac{\text{晶胞中原子体积}}{\text{晶体体积}} = \frac{\frac{4}{3}\pi \left(\frac{a}{2}\right)^3}{a^3} = \frac{\pi}{6} \approx 0.52$$

12.4 解: 设杂质原子在纯净锗内均匀分布, 锗原子密度为  $n_1$ , 杂质原子数密度为  $n_2$ , 依据题意, 有

$$\frac{n_2}{n_1} = 10^{-9}$$

将锗的结构假设为立方点阵, 设锗的晶格常量为  $a_1$ , 杂质间的距离为  $a_2$ , 对于单位体积, 应有

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{n_1}}, \quad a_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{n_2}}$$

所以

$$a_2 = a_1 \sqrt[3]{\frac{n_1}{n_2}} = 0.5\mu\text{m}$$